COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
10 Settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{5}{4}\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema e se ne determinino i modi ed il relativo carattere.

ii) Si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema.

iii) Si determini per quali valori (se esistono) della pulsazione il sistema risponde in regime permanente ad un segnale sinusoidale con un segnale sinusoidale di uguale (pulsazione ed uguale) ampiezza. Per tali valori della pulsazione si determini lo sfasamento ϕ introdotto dal sistema.

Esercizio 2.
Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 0.1\ \frac{(s+0.1)\left(s^2+20s+10^4\right)}{s^2(s-\sqrt{10})(s+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e se ne studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

Si progetti, <u>se possibile</u>, un controllore $C(s)$ di tipo PI, e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che

i) il risultante sistema retroazionato sia di tipo uno con errore di regime permanente (alla rampa lineare) <u>pari a</u> 1;

ii) la funzione di trasferimento del sistema retroazionato, $W(s)$, abbia due poli reali coincidenti.

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si determinino le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per sistemi di tipo 0 e 1.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s = s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right) = s\left[\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right].$$

È immediato quindi verificare che l'equazione caratteristica ha una radice in 0 (a cui viene associato il modo costante 1, limitato ma non convergente) e pertanto il sistema non è asintoticamente stabile. Gli altri due zeri sono complessi coniugati e collocati in $-\frac{1}{2} \pm j$: ad essi vengono associati i due modi complessi coniugati $e^{\left(-\frac{1}{2}+j\right)t}$ e $e^{\left(-\frac{1}{2}-j\right)t}$ o, equivalentemente, i due modi reali $e^{-\frac{t}{2}} \sin t$ e $e^{-\frac{t}{2}} \cos t$. Entrambi questi modi (in entrambe le rappresentazioni) sono convergenti.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + s}{s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s} = \frac{s+1}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

Poiché la seconda è una rappresentazione irriducibile della $W(s)$ ed il polinomio al denominatore è di Hurwitz (per la regola dei segni di Cartesio), ne consegue che il sistema è BIBO stabile pur non essendo asintoticamente stabile.

ii) [4 punti] La risposta al gradino del sistema, $w_{-1}(t)$, ha trasformata di Laplace

$$W_{-1}(s) = \frac{s+1}{s\left(s^2 + s + \frac{5}{4}\right)}.$$

La decomposizione in fratti semplici porta a

$$\begin{aligned} W_{-1}(s) &= W(s)\frac{1}{s} = \frac{4/5}{s} + \frac{-4/5s + 1/5}{s^2 + s + \frac{5}{4})} = \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\left(\frac{s - 1/4}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}\right) \\ &= \frac{4/5}{s} - \frac{4}{5}\left(\frac{s + 1/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}\right). \end{aligned}$$

Antitrasformando, si ottiene, allora

$$w_{-1}(t) = \frac{4}{5}\left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \cos t + \frac{3}{4} e^{-\frac{t}{2}} \sin t\right] \delta_{-1}(t).$$

iii) [5 punti] Osserviamo, preliminarmente, che il sistema è BIBO stabile e pertanto ha senso parlare di risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza a segnali sinusoidali. Sappiamo che se A rappresenta l'ampiezza di una sinusoide in ingresso di pulsazione ω, l'ampiezza della sinusoide che rappresenta la corrispondente risposta di regime permanente (ed ha la medesima pulsazione ω) è data da $A \cdot |W(j\omega)|$, dove $W(j\omega)$ rappresenta la risposta in frequenza del sistema. Si tratta quindi di valutare per quali valori di $\omega > 0$, se esistono, vale $|W(j\omega)| = 1$.

La risposta in frequenza del sistema del sistema è pari a

$$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{\left(\frac{5}{4} - \omega^2\right) + j\omega}.$$

Imponendo che essa abbia modulo unitario si trova

$$|W(j\omega)| = \frac{|1 + j\omega|}{\left|\left(\frac{5}{4} - \omega^2\right) + j\omega\right|} = 1,$$

condizione che può essere riscritta, equivalentemente, nella forma

$$|1 + j\omega|^2 = \left|\left(\frac{5}{4} - \omega^2\right) + j\omega\right|^2,$$

ovvero nella forma

$$1 + \omega^2 = \left(\frac{5}{4} - \omega^2\right)^2 + \omega^2.$$

Operiamo la sostituzione $x = \omega^2$, ottenendo l'equazione

$$1 + x = \frac{25}{16} - \frac{5}{2}x + x^2 + x$$

ovvero

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{16} = 0,$$

le cui radici sono

$$x_1 = \frac{1}{4} \qquad x_2 = \frac{9}{4}$$

e portano alle due pulsazioni positive

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \qquad \omega_2 = \frac{3}{2}.$$

Andiamo ora a valutare gli sfasamenti introdotti dal sistema in corrispondenza a tali pulsazioni. Ciò si riduce al calcolo dell'argomento della risposta in frequenza in corrispondenza a tali pulsazioni. Per $\omega = \omega_1$ si trova $W(j\omega_1) = 1$ e quindi $\arg W(j\omega_1) = 0$ rad. Per $\omega = \omega_2$ si trova

$$W(j\omega_2) = \frac{1 + j\frac{3}{2}}{-1 + j\frac{3}{2}}$$

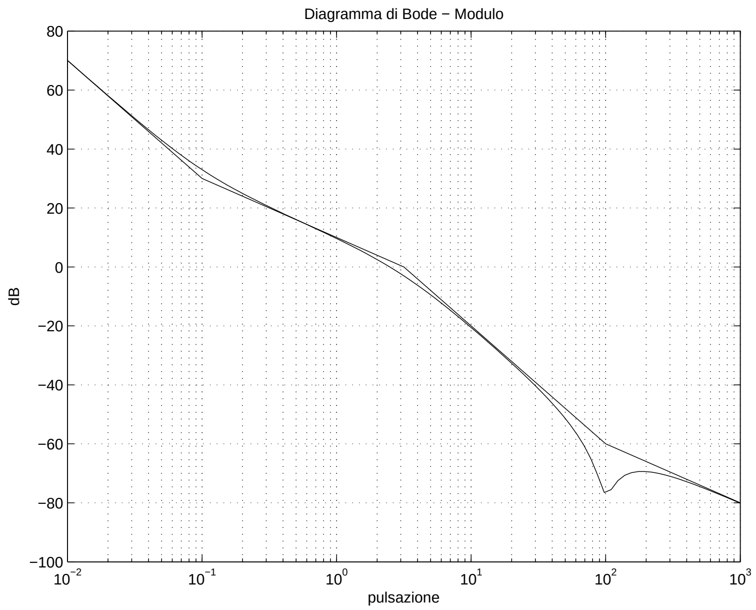
e quindi $\arg W(j\omega_2) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) - \left[\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi\right] = 2 \cdot \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) - \pi$ rad.

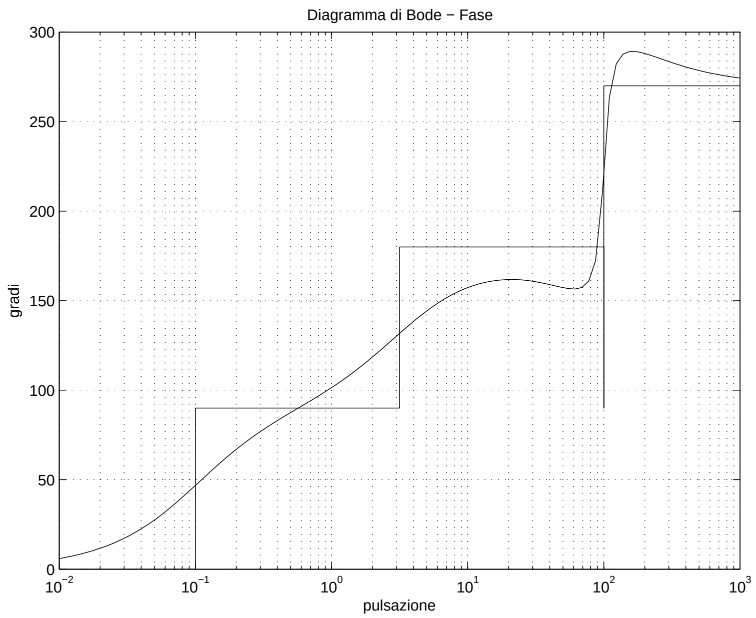
Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = 0.1\,\frac{(s + 0.1)\left(s^2 + 20s + 10^4\right)}{s^2(s - \sqrt{10})(s + 100)} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\,\frac{(1 + 10s)\left(1 + 2 \cdot 0.1\frac{s}{10^2} + \frac{s^2}{(10^2)^2}\right)}{s^2\left(1 - \frac{s}{\sqrt{10}}\right)(1 + 0.01s)}$$

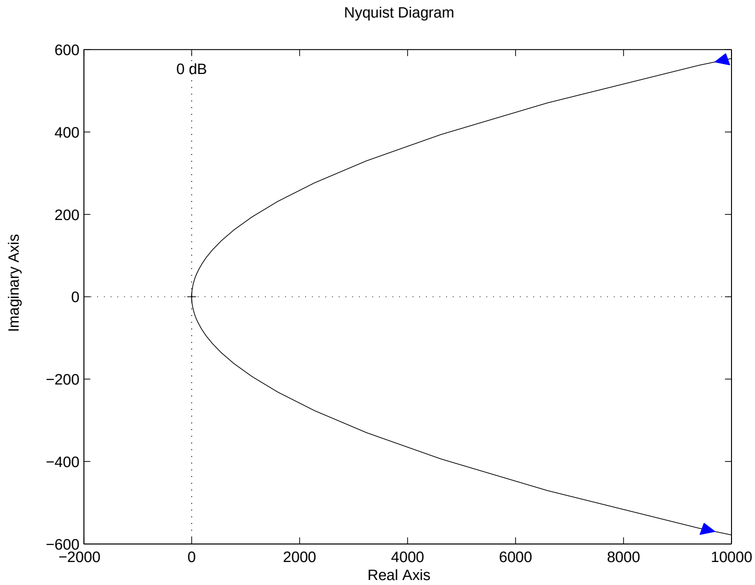
Pertanto $K_B = -10^{-1/2}$ (da cui $|K_B|_{\mathrm{dB}} = -10$ dB) e la risposta in frequenza presenta un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), uno zero reale negativo in -0.1 ($1/T' = 0.1$ e

$\mu' = 1$), un polo reale positivo in $\sqrt{10} = 10^{1/2}$ ($1/T_1 = 10^{1/2}$ e $\mu_1 = 1$), un polo reale negativo in -100 ($1/T_2 = 10^2$ e $\mu_2 = 1$) ed una coppia di zeri complessi coniugati con $\omega_n' = 10^2$ e $\xi' = 0.1$ (e $|\xi'| < 1/\sqrt{2}$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

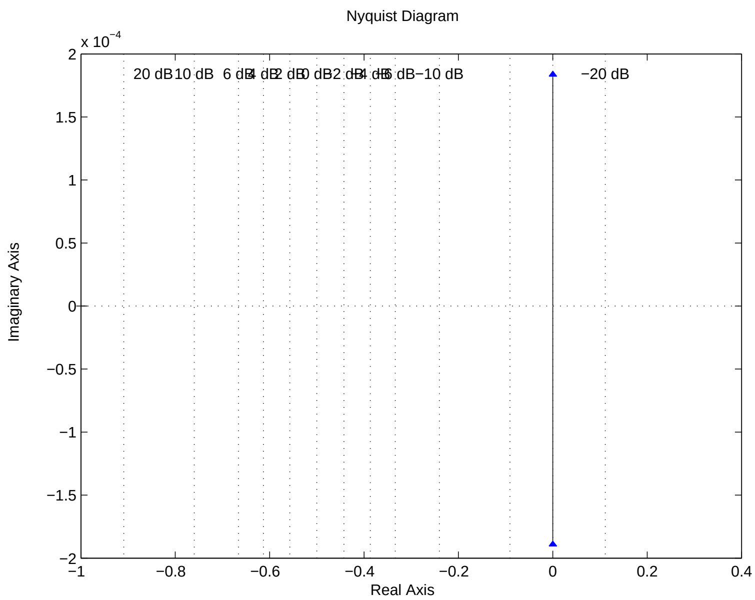




ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma arriva, per $\omega \to +\infty$, con fase di $270° = -90°$, tuttavia per motivi puramente numerici questo fatto non è ben visibile dal diagramma precedente. Riportiamo, pertanto, di seguito il dettaglio del diagramma in prossimità dell'origine.



Una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito (tracciando un angolo giro in verso orario dal punto di pulsazione $\omega = -\varepsilon$ al punto di pulsazione $\omega = \varepsilon$), per valutare quanti giri il diagramma compie attorno al punto $-1+j0$ è necessario stimare se il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trovi a sinistra o a destra del punto $-1+j0$. Dalla valutazione del diagramma di Bode si vede che quando la fase assume il valore $180°$ (o una sua determinazione equivalente) il modulo si trova molto al di sotto del valore 0 dB. Pertanto l'attraversamento del semiasse reale negativo avviene alla destra del punto critico. Si trova, quindi, che il diagramma al finito compie 1 giro in verso orario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = -1$. Poiché $G(s)$ ha un solo polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, la condizione $N = -1$ assicura $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta due poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4 punti] Riscriviamo il controllore PI nella forma $C(s) = \frac{K_i}{s}\left(1 + \frac{K_p}{K_i}s\right)$. Da ciò è immediato dedurre che (se l'azione integrale non è nulla) $K_B(C) = K_i$. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine e quindi deve essere $K_i \neq 0$. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{K_i \cdot 0.1} \approx 1$$

da cui segue $K_i \approx 10$. Prendiamo $K_i = 10$ a cui corrisponde $C(s) = \frac{10}{s}\left(1 + \frac{K_p}{K_i}s\right)$. Poniamo quindi $K := \frac{K_p}{K_i}$. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa, allora, una funzione del parametro K:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{10(s+1)}{s(s+10)}(1 + Ks)}{1 + \frac{10(s+1)}{s(s+10)}(1 + Ks)} \\ &= \frac{10(s+1)(1 + Ks)}{s(s+10) + 10(s+1)(1 + Ks)} = \frac{10(s+1)(1 + Ks)}{(1 + 10K)s^2 + (20 + 10K)s + 10}. \end{aligned}$$

Perchè la funzione di trasferimento del sistema retroazionato presenti due poli reali coincidenti occorre e basta che il discriminante del polinomio al denominatore nella rappresentazione di $W(s)$ abbia discriminante nullo. Ciò equivale ad imporre la condizione

$$(20 + 10K)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (1 + 10K) = 0,$$

ovvero

$$360 + 100K^2 = 0,$$

condizione che chiaramente non può essere verificata per nessun valore di $K \in \mathbb{R}$. Pertanto il problema non ha soluzione.

Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 6 del libro di testo, pagina 164 e successive.