

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

19 Febbraio 2009 - 54 ore

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + (a^2 + 6)y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 5u(t),$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$;
- ii) Per $a = -2$ si determini, se esistono, risposta di regime permanente e risposta transitoria (entrambe forzate) al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin t \, \delta_{-1}(t);$$

- iii) Per $a = -3$ si determini l'evoluzione libera del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 2, \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = -3 - \sqrt{5}, \quad \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = 4.$$

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01 \frac{(s-10)(s^2+20s+10^4)}{s^2(s+100)}$$

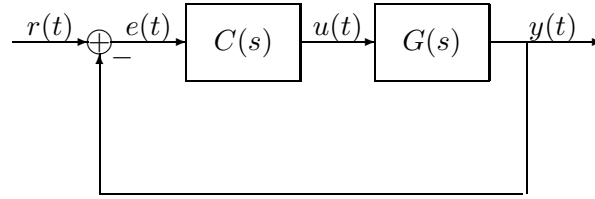
la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

- i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}_+$;
- ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0.2s+1}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progettati, se possibile, un controllore di tipo PI

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che

- 1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;
- 2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 80° .

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t),$$

($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) si derivi in dettaglio, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'espressione dell'uscita del sistema in corrispondenza alla generica famiglia di condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$ e al generico segnale di ingresso $u(t), t \in \mathbb{R}_+$, causale e dotato di trasformata di Laplace e si dimostri che la funzione di trasferimento del sistema è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

3	1	5
2	$-a$	$a^2 + 6$
1	$\frac{(a+2)(a+3)}{a}$	0
0	$a^2 + 6$	0

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $a < 0$, $a + 2 < 0$ e $a + 3 > 0$, oppure $a < 0$, $a + 2 > 0$ e $a + 3 < 0$. La prima condizione si verifica se e solo se $-3 < a < -2$, la seconda mai. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a \in (-3, -2)$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + 5}{s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in $\pm j\sqrt{5}$. Per questa ragione l'unica possibilità perché abbia luogo una semplificazione tra numeratore e denominatore che lasci alla fine un'espressione ridotta al cui denominatore compaia solo uno zero reale negativo, è che esista un valore del parametro a per il quale il polinomio al denominatore sia esprimibile nella forma

$$s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6) = (s^2 + 5)(s + \lambda),$$

per qualche $\lambda > 0$. Sviluppando l'espressione al secondo membro ed eguagliando i coefficienti dei termini di vario grado si ottiene: $s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6) = s^3 + \lambda s^2 + 5s + 5\lambda$, da cui

$$\begin{cases} a = -\lambda, \\ a^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{cases}$$

che porta a $a = -2$ con $\lambda = 2$ e $a = -3$ con $\lambda = 3$. In entrambi i casi è chiaro che abbiamo stabilità BIBO. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $a \in [-3, -2]$.

ii) [3.5 punti] Per $a = -2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente (forzata) ad ogni segnale sinusoidale. Per $a = -2$ la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{1}{s + 2}.$$

Per calcolare risposta di regime permanente e risposta transitoria, conviene operare nel dominio delle trasformate, valutare l'intera evoluzione forzata e separare la parte transitoria da quella di regime. Si trova

$$Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{5} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{5} \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5} \frac{1}{s^2+1},$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = \left[\frac{1}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t \right] \delta_{-1}(t).$$

Pertanto è immediato riconoscere la componente transitoria

$$y_{tr}(t) = \frac{1}{5} e^{-2t},$$

e quella di regime permanente

$$y_{rp}(t) = -\frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t.$$

iii) [3.5 punti] Per $a = -3$ sappiamo già, dal punto i) che l'equazione caratteristica del sistema diventa

$$(s^2 + 5)(s + 3) = 0,$$

e quindi il sistema ha due radici immaginarie coniugate semplici $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{5}$ e una radice semplice in $\lambda_3 = -3$. Di conseguenza i modi del sistema sono $\cos(\sqrt{5}t)$, $\sin(\sqrt{5}t)$ e e^{-3t} , e l'evoluzione libera del sistema assume la seguente espressione:

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 \cos(\sqrt{5}t) + c_3 \sin(\sqrt{5}t).$$

Se calcoliamo la derivata prima e seconda dell'evoluzione libera otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell(t)}{dt} &= -3c_1 e^{-3t} - \sqrt{5}c_2 \sin(\sqrt{5}t) + c_3 \sqrt{5} \cos(\sqrt{5}t), \\ \frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2} &= 9c_1 e^{-3t} - 5c_2 \cos(\sqrt{5}t) - 5c_3 \sin(\sqrt{5}t). \end{aligned}$$

Imponendo

$$\begin{aligned} 2 &= y(0^-) = y_\ell(0) = c_1 + c_2, \\ -3 - \sqrt{5} &= \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0)}{dt} = -3c_1 + c_3 \sqrt{5}, \\ 4 &= \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2 y_\ell(0)}{dt^2} = 9c_1 - 5c_2, \end{aligned}$$

troviamo

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1$$

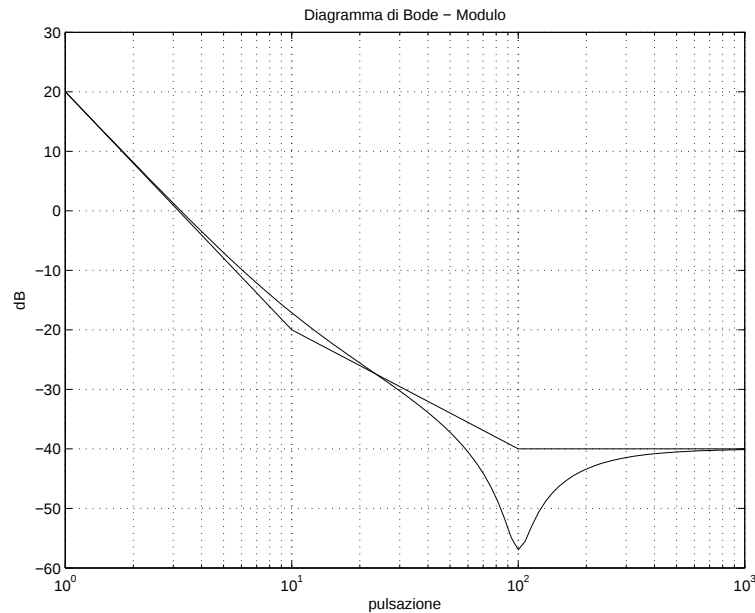
che corrisponde a

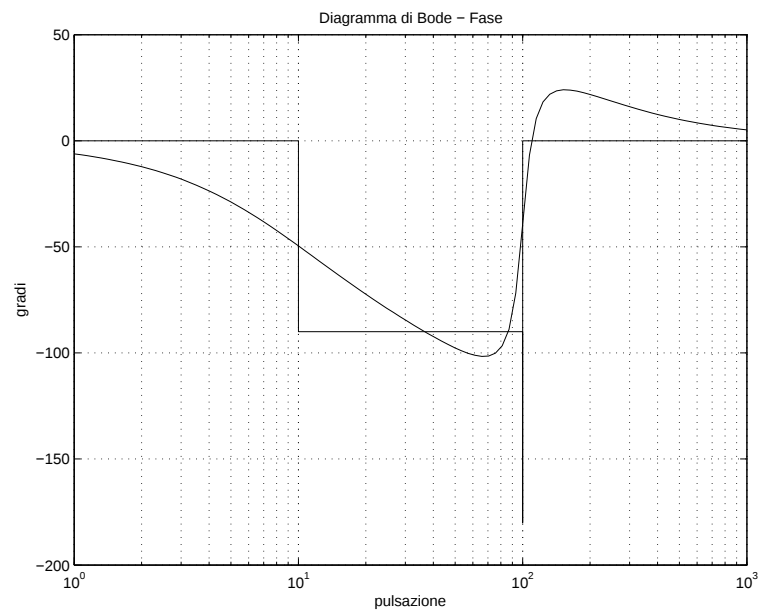
$$y_\ell(t) = e^{-3t} + \cos(\sqrt{5}t) - \sin(\sqrt{5}t).$$

Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

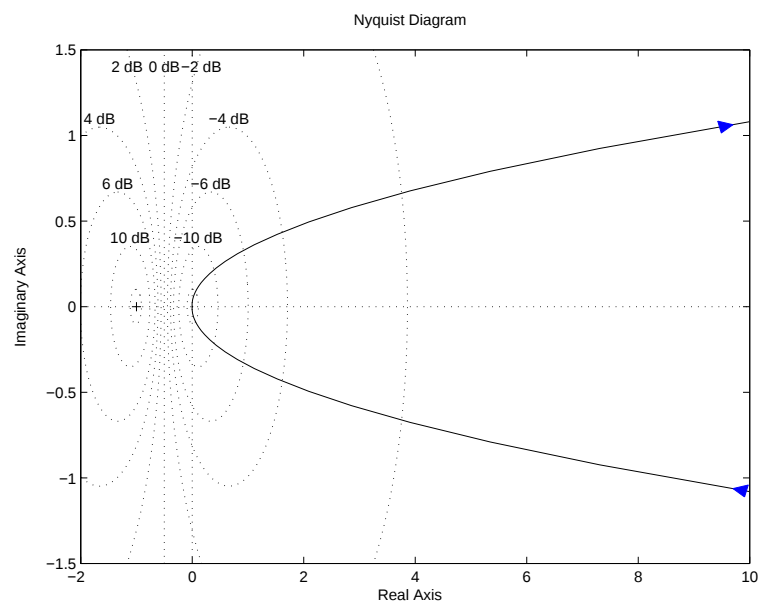
$$G(s) = -10 \frac{(1 - 0.1s) \left(1 + 2\frac{1}{10} \frac{s}{100} + \frac{s^2}{100^2}\right)}{s^2(1 + 0.01s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T'_1 = -10$ e $\mu'_1 = 1$, un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega'_n = 100$ e smorzamento $\xi' = 1/10 = 0.1$, un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), un polo reale negativo semplice con $1/T = 100$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

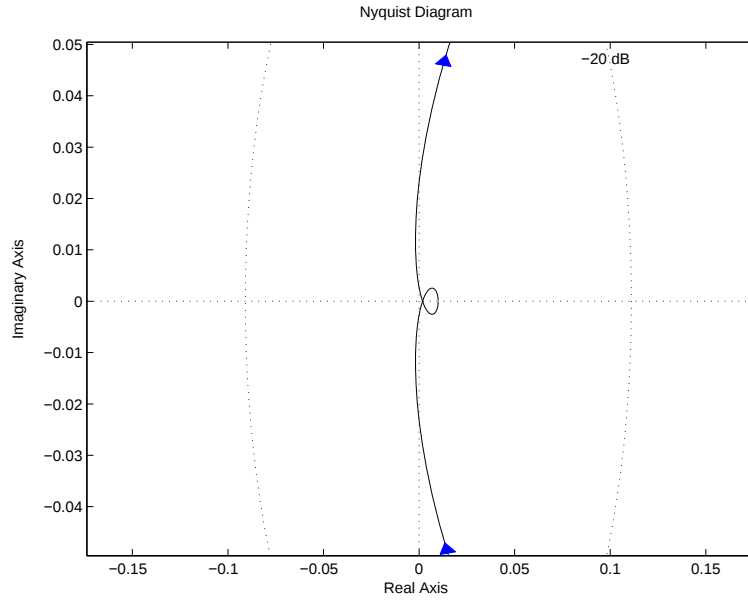




ii) [5.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



con dettaglio



$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato (un angolo giro in verso orario dal ramo alto del diagramma al ramo basso), si trova $N = -1$ e quindi $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4.5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Di conseguenza ha senso attribuire a K_i un valore non nullo. Riscriviamo il controllore PI nella forma

$$C_{PI}(s) = \frac{K_i}{s} \left(1 + \frac{K_p}{K_i} s \right).$$

Scelgo, quindi, il precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_i}{s},$$

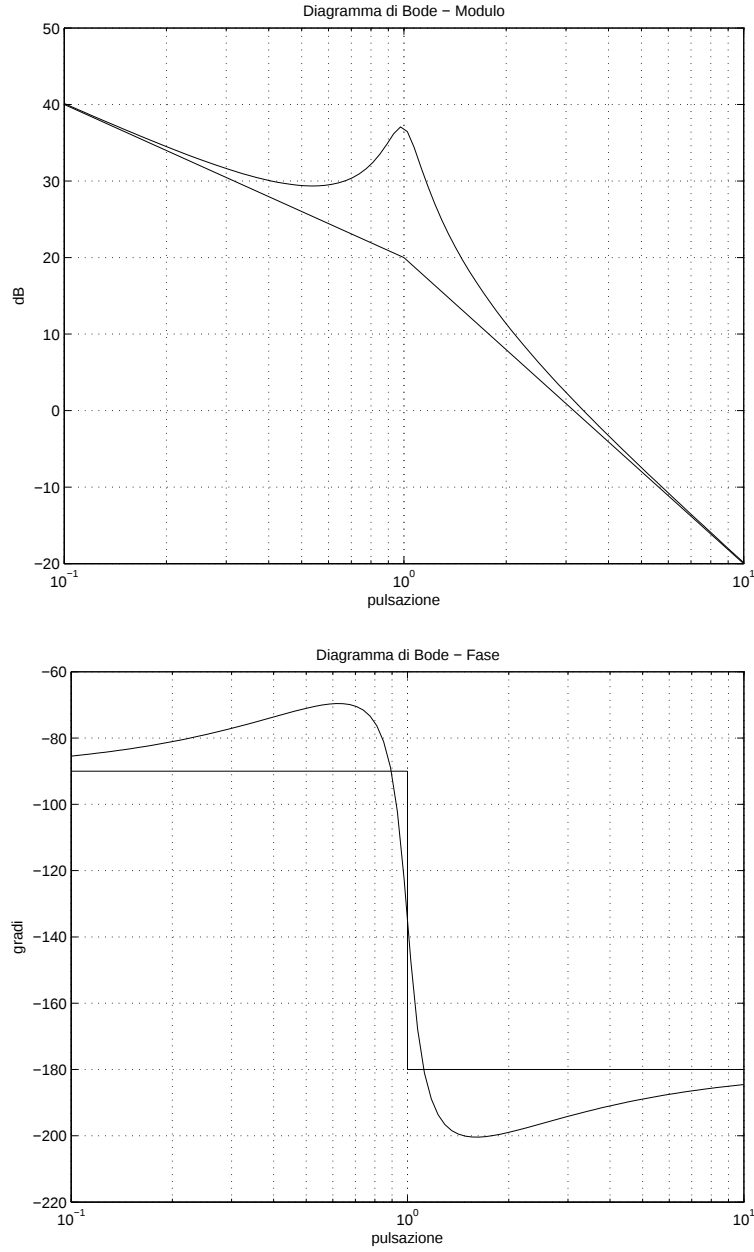
con K_i tale da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_i} = \frac{1}{0.1K_i} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Si trova quindi $K_i \approx 10$. Assumiamo nel seguito $K_i = 10$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10 \frac{1+s}{s \left(1 + 2\frac{1}{10}s + s^2 \right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase



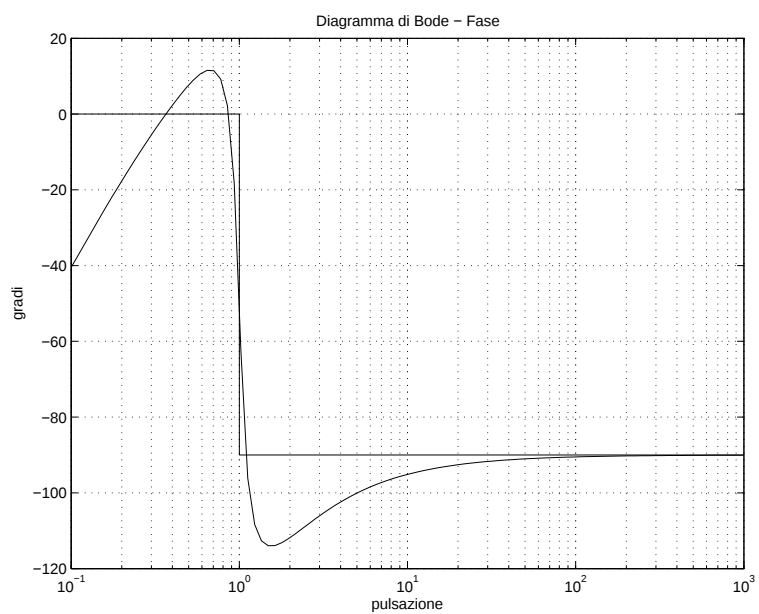
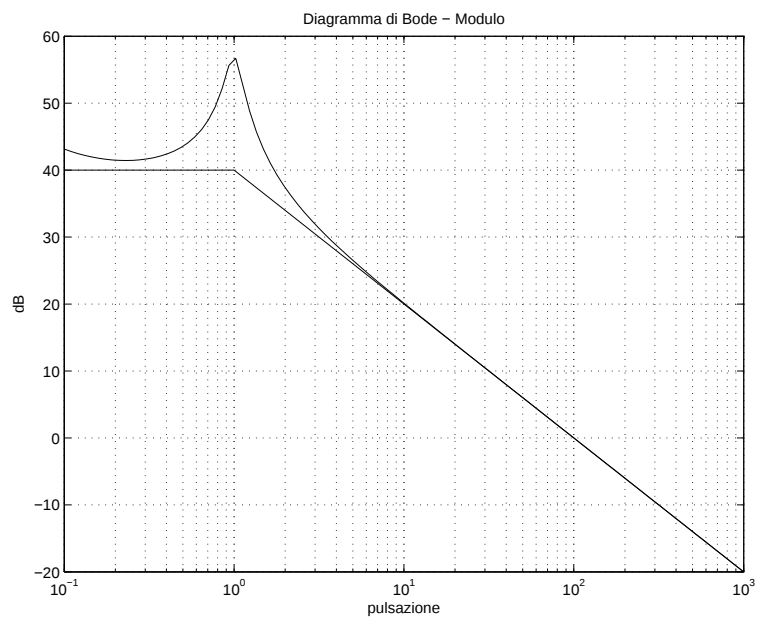
È immediato rendersi conto del fatto che $\omega_A \approx 10^{1/2}$ rad/sec, mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0^\circ$. È quindi necessario sollevare il diagramma di ampiezza e fase attraverso l'inserzione di uno zero stabile prima dell'attuale pulsazione di attraversamento. Procedendo “ad occhio”, si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec. Ciò equivale ad assumere

$$C''(s) = \left(1 + \frac{K_p}{K_i} s\right) = 1 + 10s$$

e quindi il controllore finale è

$$C_{PI}(s) = C'(s)C''(s) = \frac{10}{s} (1 + 10s) = 100 + \frac{10}{s}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C_{PI}(s)G(s)$:



Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, pag. 68 e seguenti, del Libro di testo.