COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
19 Febbraio 2009 - 78 ore

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + (a^2+6)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 5u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) Per $a = -2$ si determini, se esistono, risposta di regime permanente e risposta transitoria (entrambe forzate) al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin t \; \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 0.01 \; \frac{(s-10)(s^2+20s+10^4)}{s^2(s+100)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

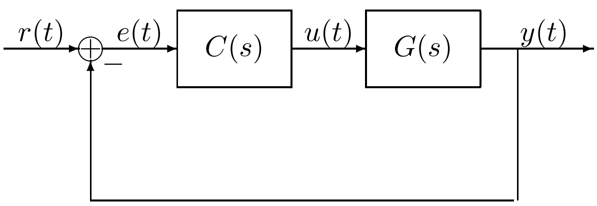
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0.2s+1}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore di tipo PI

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 80°.

Esercizio 4 Dato il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{5}{6}y(t-1) + \frac{1}{6}y(t-2) = u(t-2),$$

i) si determini l'evoluzione libera in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(-1) = 5, \qquad y(-2) = 13;$$

ii) si determini l'espressione della risposta impulsiva $w(t), t \in \mathbb{Z}_+$.

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) si derivi in dettaglio, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'espressione dell'uscita del sistema in corrispondenza alla generica famiglia di condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$ e al generico segnale di ingresso $u(t), t \in \mathbb{R}_+$, causale e dotato di trasformata di Laplace e si dimostri che la funzione di trasferimento del sistema è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 5 \\
2 & -a & a^2+6 \\
1 & \dfrac{(a+2)(a+3)}{a} & 0 \\
0 & a^2+6 & 0
\end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $a < 0, a+2 < 0$ e $a+3 > 0$, oppure $a < 0, a+2 > 0$ e $a+3 < 0$. La prima condizione si verifica se e solo se $-3 < a < -2$, la seconda mai. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a \in (-3, -2)$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 + 5}{s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in $\pm j\sqrt{5}$. Per questa ragione l'unica possibilità perché abbia luogo una semplificazione tra numeratore e denominatore che lasci alla fine un'espressione ridotta al cui denominatore compaia solo uno zero reale negativo, è che esista un valore del parametro a per il quale il polinomio al denominatore sia esprimibile nella forma

$$s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6) = (s^2 + 5)(s + \lambda),$$

per qualche $\lambda > 0$. Sviluppando l'espressione al secondo membro ed eguagliando i coefficienti dei termini di vario grado si ottiene: $s^3 - as^2 + 5s + (a^2 + 6) = s^3 + \lambda s^2 + 5s + 5\lambda$, da cui

$$\begin{cases} a = -\lambda, \\ a^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{cases}$$

che porta a $a = -2$ con $\lambda = 2$ e $a = -3$ con $\lambda = 3$. In entrambi i casi è chiaro che abbiamo stabilità BIBO. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $a \in [-3, -2]$.

ii) [3 punti] Per $a = -2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente (forzata) ad ogni segnale sinusoidale. Per $a = -2$ la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Per calcolare risposta di regime permanente e risposta transitoria, conviene operare nel dominio delle trasformate, valutare l'intera evoluzione forzata e separare la parte transitoria da quella di regime. Si trova

$$Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s+2}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{5}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1},$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = \left[\frac{1}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

Pertanto è immediato riconoscere la componente transitoria

$$y_{tr}(t) = \frac{1}{5}e^{-2t},$$

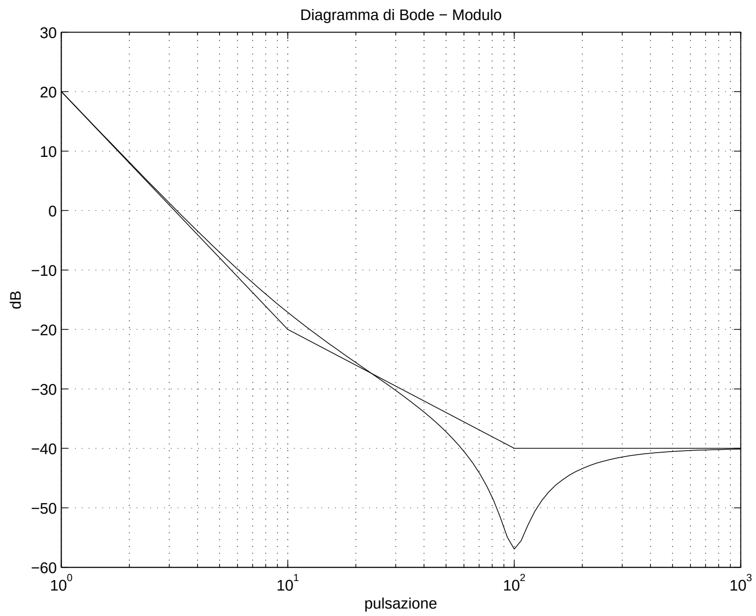
e quella di regime permanente

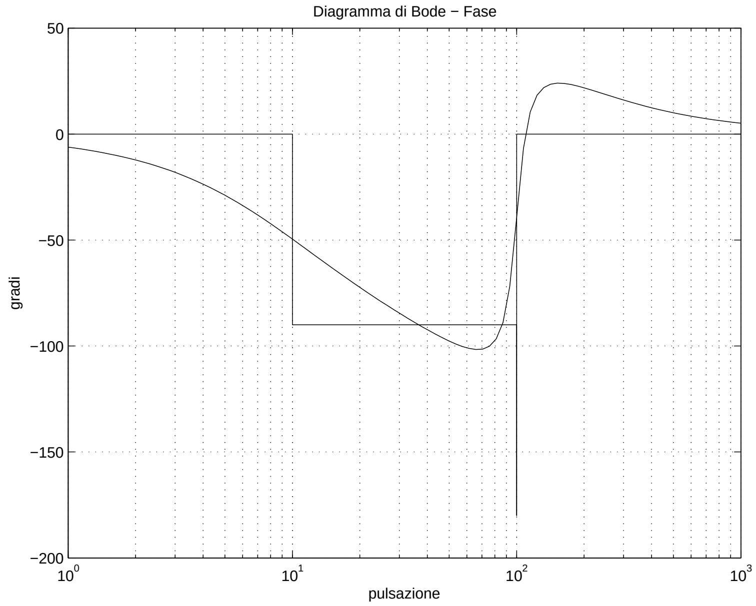
$$y_{rp}(t) = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t.$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

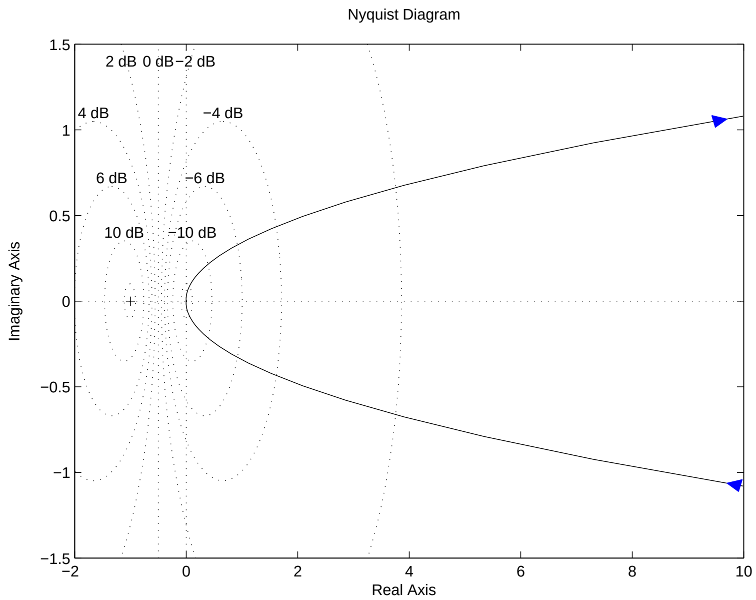
$$G(s) = -10\frac{(1-0.1s)\left(1+2\frac{1}{10}\frac{s}{100}+\frac{s^2}{100^2}\right)}{s^2(1+0.01s)}.$$

Pertanto $K_B = -10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale positivo con $1/T_1' = -10$ e $\mu_1' = 1$, un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 100$ e smorzamento $\xi' = 1/10 = 0.1$, un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), un polo reale negativo semplice con $1/T = 100$ e $\mu = 1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

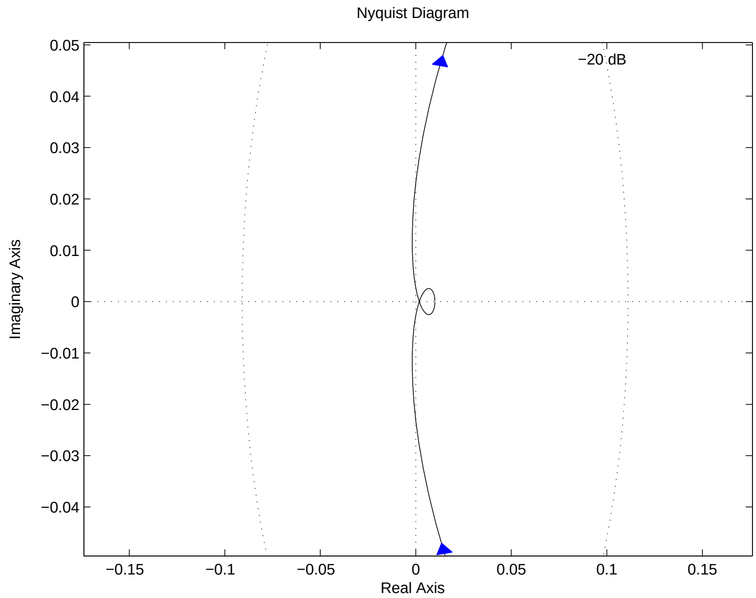




ii) [5.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



con dettaglio



$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato (un angolo giro in verso orario dal ramo alto del diagramma al ramo basso), si trova $N = -1$ e quindi $n_{W+} = 1$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4.5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Di conseguenza ha senso attribuire a K_i un valore non nullo. Riscriviamno il controllore PI nella forma

$$C_{PI}(s) = \frac{K_i}{s}\left(1 + \frac{K_p}{K_i}s\right).$$

Scelgo, quindi, il precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_i}{s},$$

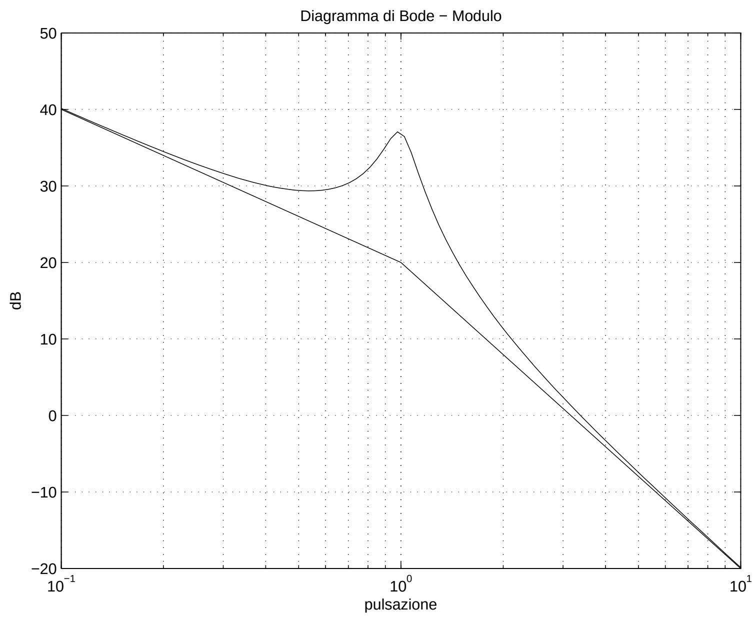
con K_i tale da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

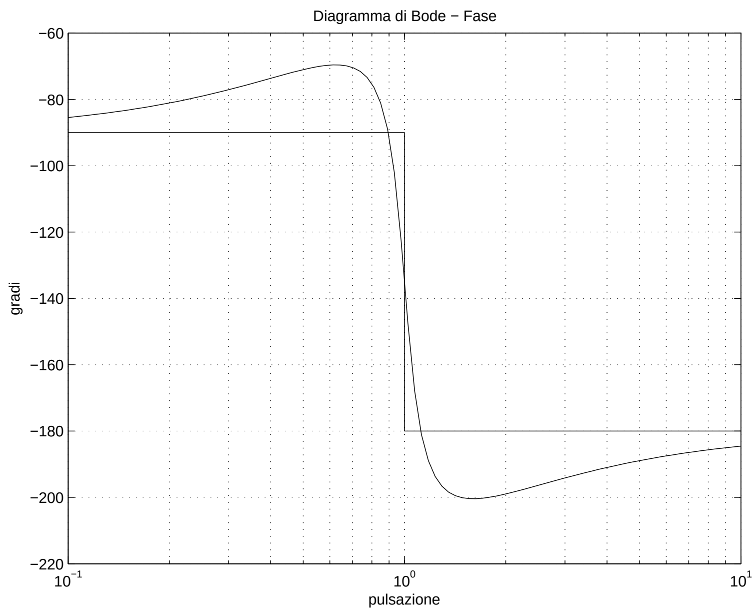
$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_i} = \frac{1}{0.1K_i} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Si trova quindi $K_i \approx 10$. Assumiamo nel seguito $K_i = 10$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10\frac{1+s}{s\left(1 + 2\frac{1}{10}s + s^2\right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase





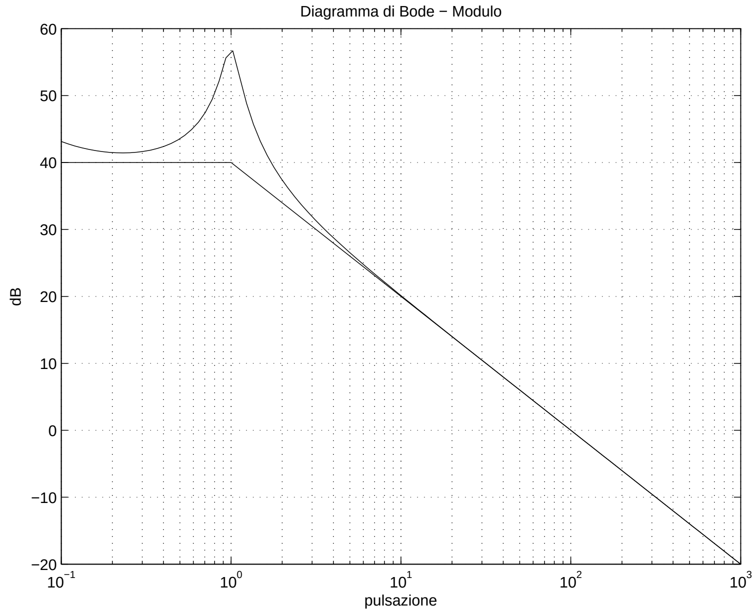
È immediato rendersi conto del fatto che $\omega_A \approx 10^{1/2}$ rad/sec, mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0°$. È quindi necessario sollevare il diagramma di ampiezza e fase attraverso l'inserzione di uno zero stabile prima dell'attuale pulsazione di attraversamento. Procedendo "ad occhio", si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec. Ciò equivale ad assumere

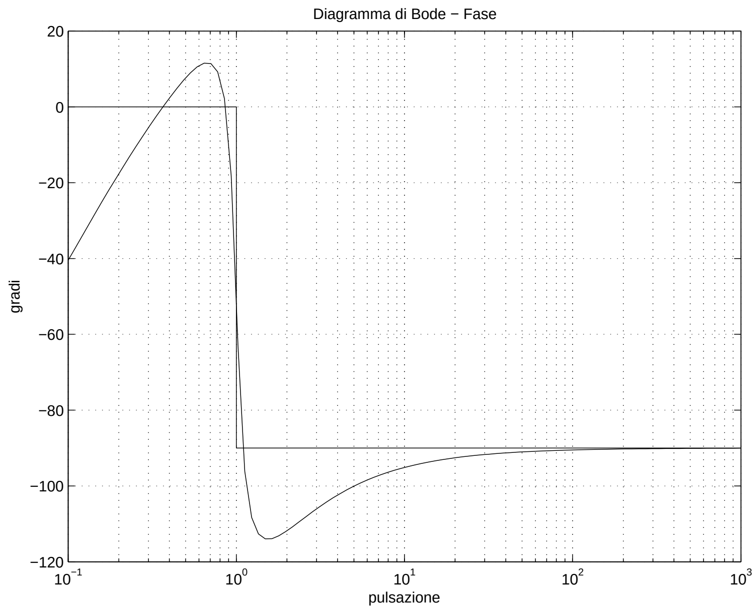
$$C''(s) = \left(1 + \frac{K_p}{K_i} s\right) = 1 + 10s$$

e quindi il controllore finale è

$$C_{PI}(s) = C'(s)C''(s) = \frac{10}{s}(1 + 10s) = 100 + \frac{10}{s}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C_{PI}(s)G(s)$:





Esercizio 4. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0$$

a cui corrispondono le due radici semplici $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = 1/3$. Di conseguenza l'evoluzione libera sarà del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 \frac{1}{2^t} + c_2 \frac{1}{3^t}.$$

Imponendo

$$\begin{aligned} 5 &= y(-1) = y_\ell(-1) = c_1 2 + c_2 3, \\ 13 &= y(-2) = y_\ell(-2) = c_1 4 + c_2 9, \end{aligned}$$

si trova $c_1 = c_2 = 1$ e quindi $y_\ell(t) = \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t}$.
ii) [2.5 punti] Poiché $n = 2 = m = 2$, l'espressione della risposta impulsiva è del tipo

$$w(t) = d_0 \delta(t) + \left[d_1 \frac{1}{2^t} + d_2 \frac{1}{3^t} \right] \delta_{-1}(t-1).$$

Ora si trova da una parte

$$\begin{aligned} w(0) &= d_0 \\ w(1) &= d_1 \frac{1}{2} + d_2 \frac{1}{3} \\ w(2) &= d_1 \frac{1}{4} + d_2 \frac{1}{9} \end{aligned}$$

dall'altra, valutando l'equazione alle differenze

$$w(t) - \frac{5}{6} w(t-1) + \frac{1}{6} w(t-2) = \delta(t-2),$$

per $t = 0, t = 1$ e $t = 2$ si trova $w(0) = 0, w(1) = 0, w(2) = 1$ e ciò porta a

$$w(t) = \left[12 \left(\frac{1}{2} \right)^t - 18 \left(\frac{1}{3} \right)^t \right] \delta_{-1}(t-1).$$

Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, pag. 68 e seguenti, del Libro di testo.