

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

3 Febbraio 2009 - 54 ore

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (3+a)\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (1+a)\frac{dy(t)}{dt} + 3(1-2a)y(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 2$,

- ii) si determini, se esiste, l'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita (forzata) di regime permanente

$$y_{rp}(t) = \frac{1}{10} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right);$$

- iii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

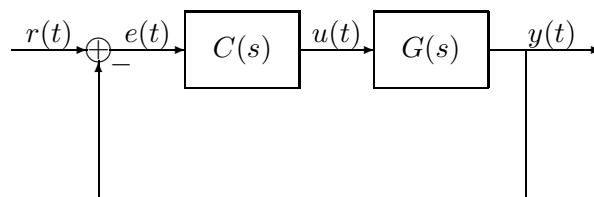
$$G(s) = 50 \frac{s(s+10)}{(s+1)(s^2-s+100)}.$$

- i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0.2s+1}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$, razionale proprio, in modo tale che

- 1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;
- 2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 80° .

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si determinino le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per sistemi di tipo 0, 1 e 2.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (3 + a)s^2 + (1 + a)s + 3(1 - 2a).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 + a \\ 2 & 3 + a & 3(1 - 2a) \\ 1 & \frac{a(a + 10)}{a + 3} & 0 \\ 0 & 3(1 - 2a) & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $3 + a > 0$, $1 - 2a > 0$ e $a(a + 10) > 0$. Ciò si verifica se e solo se $1/2 > a > 0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $1/2 > a > 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + (3 + a)s^2 + (1 + a)s + 3(1 - 2a)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in ± 1 . Per questa ragione l'unica semplificazione di interesse tra numeratore e denominatore è quella relativa allo zero in 1 ed essa si verifica se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore si annulla in 1. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 = s^3 + (3 + a)s^2 + (1 + a)s + 3(1 - 2a) \Big|_{s=1} = 2 - a. \quad (1)$$

Si vede subito che la precedente identità è soddisfatta se e solo se $a = 2$. Per tale valore di a , $d(s)$ diventa $s^3 + 5s^2 + 3s - 9$ che fattorizza nella forma

$$s^3 + 5s^2 + 3s - 9 = (s - 1)(s^2 + 6s + 9) = (s - 1)(s + 3)^2.$$

Di conseguenza

$$W(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{s^3 + 5s^2 + 3s - 9} = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s - 1)(s + 3)^2} = \frac{s + 1}{(s + 3)^2}.$$

Ne consegue, visto che abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile ed il polinomio al denominatore è di Hurwitz, che il sistema è BIBO stabile per $a = 2$ e pertanto si ha BIBO stabilità se e solo se $1/2 > a > 0$ oppure $a = 2$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente (forzata) ad ogni segnale sinusoidale. Dalla teoria sappiamo che al segnale

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) \delta_{-1}(t)$$

il sistema risponde a regime permanente con

$$y_{rp}(t) = |W(j\omega)| A \cos(\omega t + \phi + \arg(W(j\omega))).$$

Ora, nel nostro caso, $\omega = 1$ rad/sec,

$$\begin{aligned} |W(j1)| A &= \frac{1}{10} \\ \phi + \arg(W(j1)) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di capire, una volta determinati $|W(j1)|$ e $\arg(W(j1))$, quali siano i valori di A e ϕ . Ora, per $a = 2$, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2},$$

la corrispondente risposta in frequenza alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec vale

$$W(j1) = \frac{1+j}{(3+j)^2},$$

con $|W(j)| = \frac{\sqrt{2}}{10}$ e $\arg(W(j)) = \frac{\pi}{4} - 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Pertanto devono valere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} 10A &= \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \phi + \frac{\pi}{4} - 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right) \delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] Come abbiamo già visto, per $a = 2$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2},$$

mentre la trasformata di Laplace del gradino è

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

e quindi la trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y_f(s) = W_{-1}(s) = W(s)U(s) = \frac{s+1}{s(s+3)^2}.$$

La decomposizione in fratti semplici porta a

$$W_{-1}(s) = \frac{1}{9} \frac{1}{s} - \frac{1}{9} \frac{1}{s+3} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s+3)^2}.$$

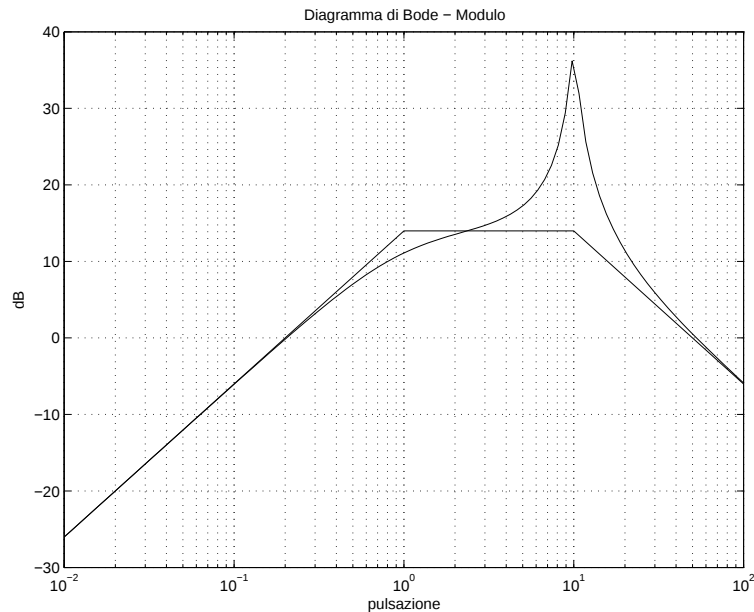
Da ciò segue

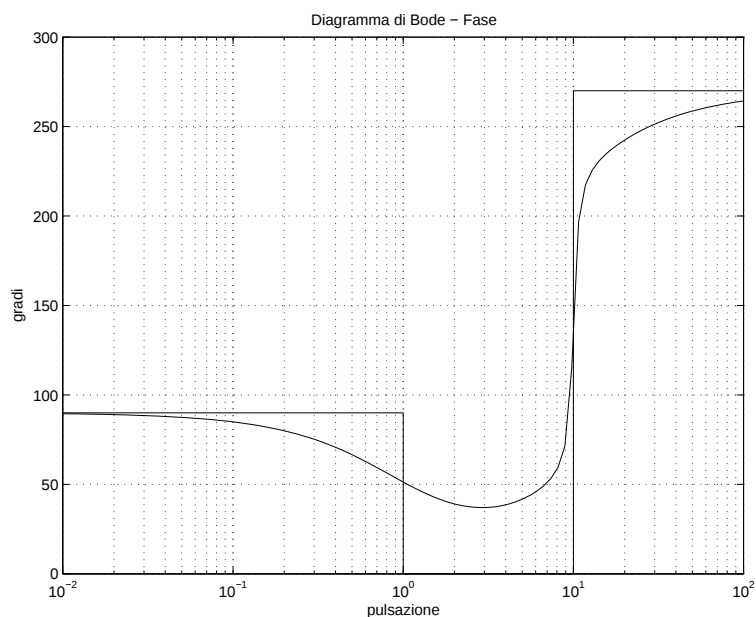
$$w_{-1}(t) = \frac{1}{9} \left[1 - e^{-3t} + 6te^{-3t} \right] \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

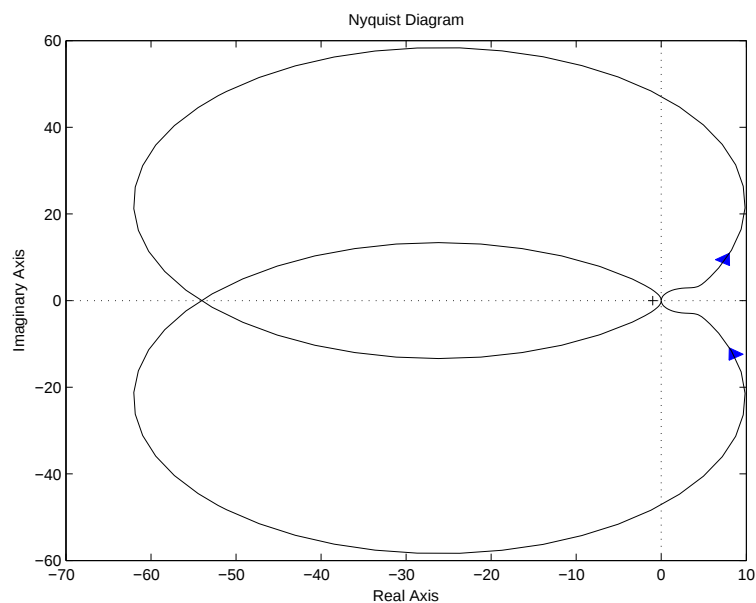
$$G(s) = 5 \frac{s \left(1 + \frac{s}{10} \right)}{(1+s) \left(\frac{s^2}{10^2} - 2 \cdot 0.05 \frac{s}{10} + 1 \right)}.$$

Pertanto $K_B = 5$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale negativo in -10 ($1/T' = 10$ e $\mu' = 1$), un polo reale negativo in -1 ($1/T = 1$ e $\mu = 1$) ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = -0.05$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due poli complessi coniugati hanno parte reale positiva e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Il diagramma di Nyquist compie due giri in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 2$. Poiché $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 2$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 3. [5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Scelgo, quindi, un precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_B(C')}{s},$$

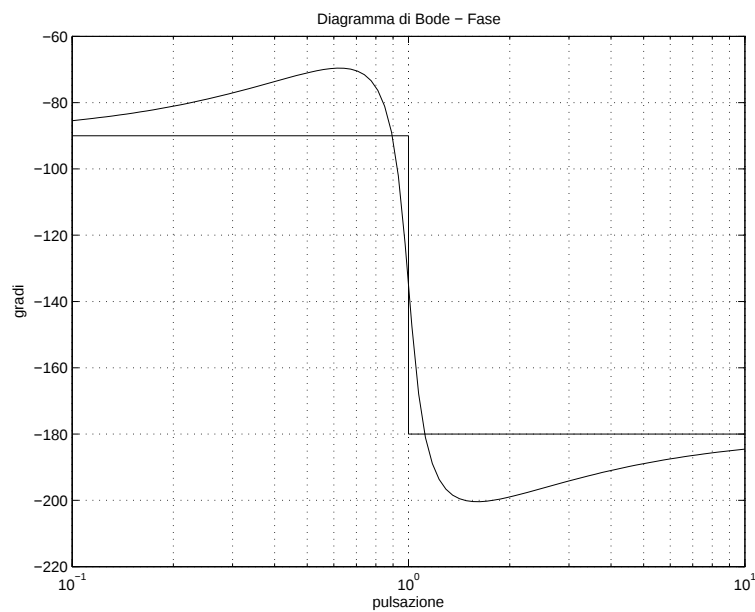
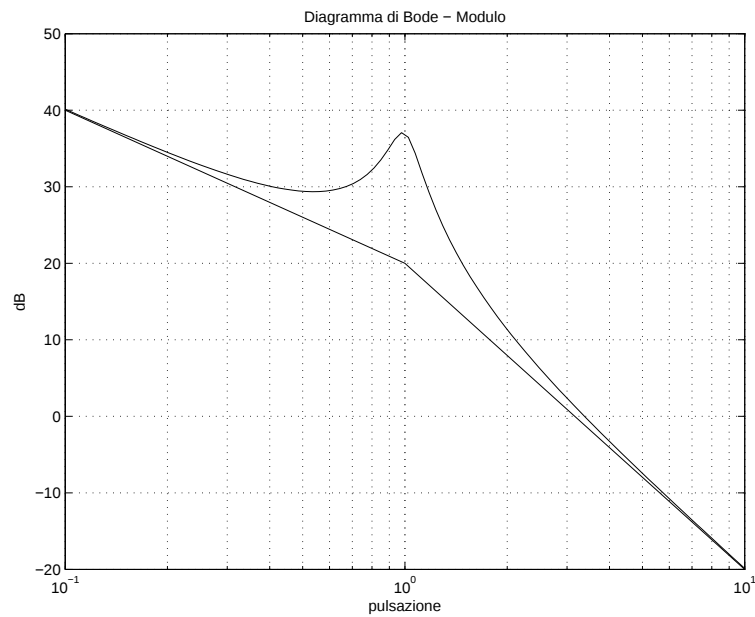
dove $K_B(C')$ verrà scelto in modo da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C')} = \frac{1}{0.1K_B(C')} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Si trova quindi $K_B(C') \approx 10$. Assumiamo nel seguito $K_B(C') = 10$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10 \frac{1+s}{s \left(1 + 2\frac{1}{10}s + s^2\right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase



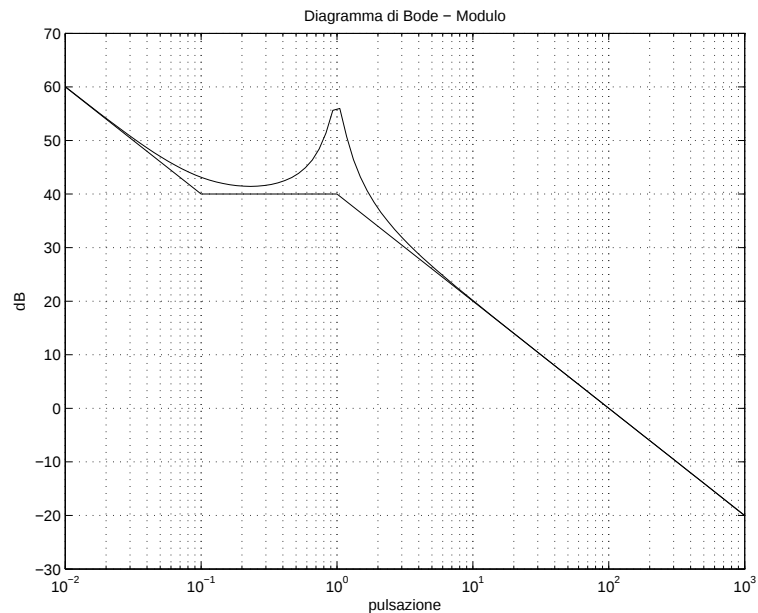
È immediato rendersi conto del fatto che $\omega_A \approx 10^{1/2}$ rad/sec, mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0^\circ$. È quindi necessario ricorrere ad una rete anticipatrice. Procedendo “ad occhio”, si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell’inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec e successivamente un polo ad una pulsazione maggiore di quella di attraversamento (ad esempio in -10^4 rad/sec). Ciò equivale ad assumere

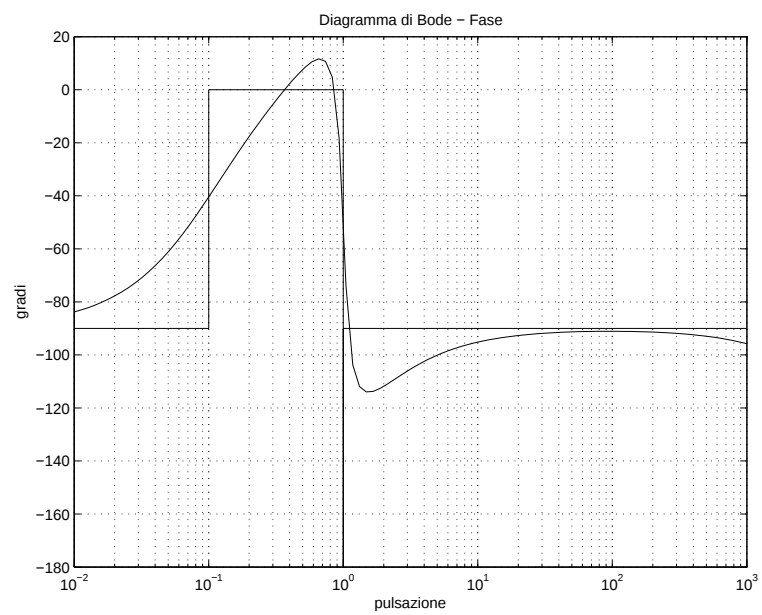
$$C''(s) = \frac{1 + 10s}{1 + 10^{-4}s}$$

e quindi il controllore finale è

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 10 \frac{1 + 10s}{s(1 + 10^{-4}s)}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C(s)G(s)$:





Teoria. [4.5 punti] Si veda il Capitolo 6 del libro di testo, pagina 164 e successive.