COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
3 Febbraio 2009 - 78 ore

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (3+a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1+a)\frac{dy(t)}{dt} + 3(1-2a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 2$,

ii) si determini, se esiste, l'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita (forzata) di regime permanente

$$y_{rp}(t) = \frac{1}{10}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = \frac{(s-0.1)(10s+100)}{s(s^2+0.2s+1)(s+0.1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

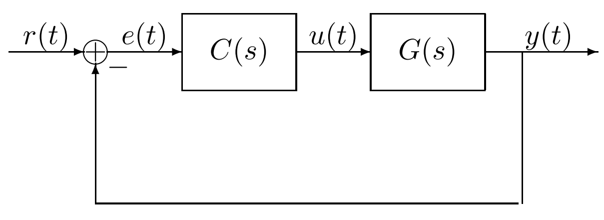
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0.2s+1}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore $C(s)$, razionale proprio, in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) pari a 0.1;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)C(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A^* = 10^2$ rad/sec e margine di fase almeno pari a 80°.

Esercizio 4 Dato il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{1}{4}y(t-2) = u(t) - u(t-1),$$

se ne determini l'espressione della risposta impulsiva.

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si determinino le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per sistemi di tipo 0, 1 e 2.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (3+a)s^2 + (1+a)s + 3(1-2a).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1+a \\ 2 & 3+a & 3(1-2a) \\ 1 & \dfrac{a(a+10)}{a+3} & 0 \\ 0 & 3(1-2a) & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $3+a>0$, $1-2a>0$ e $a(a+10)>0$. Ciò si verifica se e solo se $1/2 > a > 0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $1/2 > a > 0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2-1}{s^3 + (3+a)s^2 + (1+a)s + 3(1-2a)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in ± 1. Per questa ragione l'unica semplificazione di interesse tra numeratore e denominatore è quella relativa allo zero in 1 ed essa si verifica se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore si annulla in 1. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 = s^3 + (3+a)s^2 + (1+a)s + 3(1-2a)\Big|_{s=1} = 2-a. \tag{1}$$

Si vede subito che la precedente identità è soddisfatta se e solo se $a=2$. Per tale valore di a, $d(s)$ diventa $s^3 + 5s^2 + 3s - 9$ che fattorizza nella forma

$$s^3 + 5s^2 + 3s - 9 = (s-1)\left(s^2 + 6s + 9\right) = (s-1)(s+3)^2.$$

Di conseguenza

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 3s - 9} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+3)^2} = \frac{s+1}{(s+3)^2}.$$

Ne consegue, visto che abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile ed il polinomio al denominatore è di Hurwitz, che il sistema è BIBO stabile per $a=2$ e pertanto si ha BIBO stabilità se e solo se $1/2 > a > 0$ oppure $a=2$.

ii) [3.5 punti] Per $a = 2$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è BIBO stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente (forzata) ad ogni segnale sinusoidale. Dalla teoria sappiamo che al segnale

$$u(t) = A\cos(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$$

il sistema risponde a regime permanente con

$$y_{rp}(t) = |W(j\omega)|A\cos(\omega t + \phi + \arg(W(j\omega)).$$

Ora, nel nostro caso, $\omega = 1$ rad/sec,

$$\begin{aligned} |W(j1)|A &= \frac{1}{10} \\ \phi + \arg(W(j1)) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Si tratta quindi di capire, una volta determinati $|W(j1)|$ e $\arg(W(j1))$, quali siano i valori di A e ϕ. Ora, per $a = 2$, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2},$$

la corrispondente risposta in frequenza alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec vale

$$W(j1) = \frac{1+j}{(3+j)^2},$$

con $|W(j)| = \frac{\sqrt{2}}{10}$ e $\arg(W(j)) = \frac{\pi}{4} - 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Pertanto devono valere le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} 10A &= \frac{10}{\sqrt{2}} \\ \phi + \frac{\pi}{4} - 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

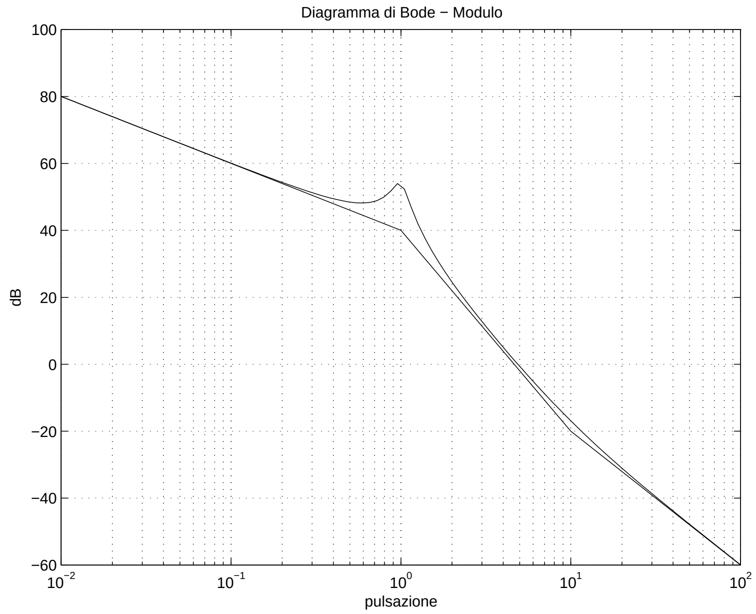
Ne consegue che

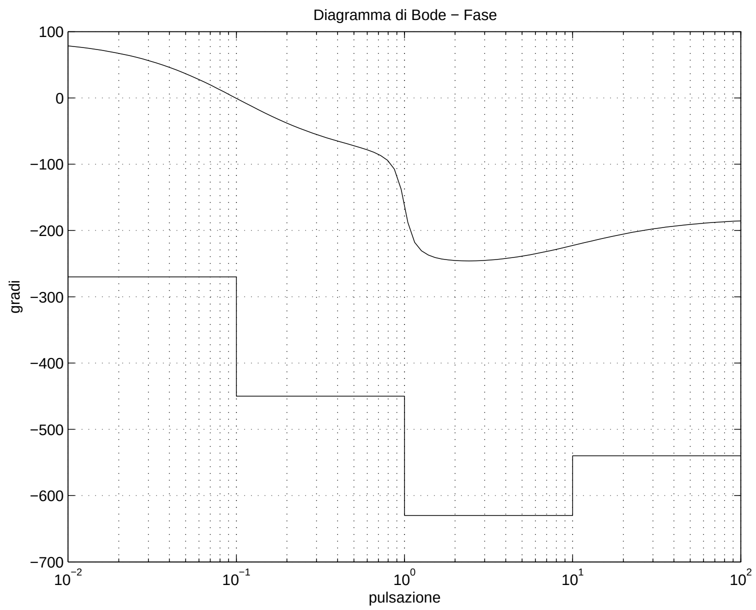
$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2 i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

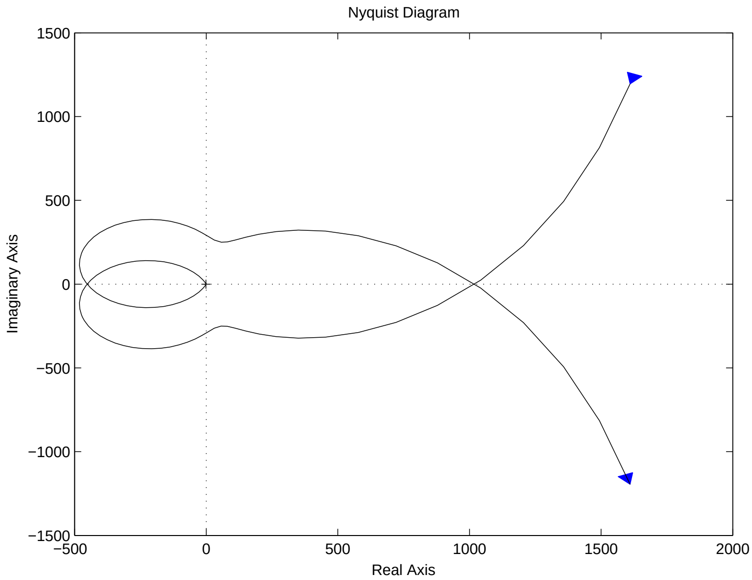
$$G(s) = \frac{(s-0.1)(10s+100)}{s(s^2+0.2s+1)(s+0.1)} = -100\frac{(1-10s)(1+0.1s)}{s(s^2+0.2s+1)(1+10s)}.$$

Pertanto $K_B = -100$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo con $1/T_1' = 10$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale positivo con $1/T_2' = -0.1$ e $\mu_2' = 1$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale negativo con $1/T = 10$ e $\mu = 1$ e un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 1/10 = 0.1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [5.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



NOTA: la figura non lo evidenzia (per problemi numerici), ma il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ attraversa il semiasse reale negativo una volta e arriva, per $\omega \to +\infty$, nell'origine con fase di $-180°$.

$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato, osservando (a partire dal diagramma di Bode) che il punto di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo sono a sinistra del punto critico, si deduce $N = -3$, ne consegue che $n_{W+} = 3$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha tre poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4.5 punti] Poiché $G(s)$ non ha poli in 0, per rendere il sistema in catena chiusa di tipo 1 devo introdurre un polo nell'origine di molteplicità unitaria. Scelgo, quindi, un precompensatore $C'(s)$ del tipo

$$C'(s) = \frac{K_B(C')}{s},$$

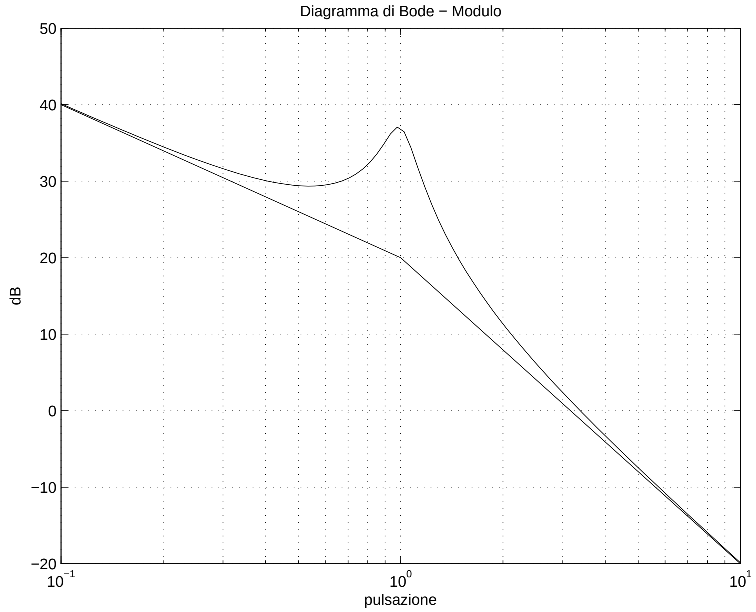
dove $K_B(C')$ verrà scelto in modo da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente

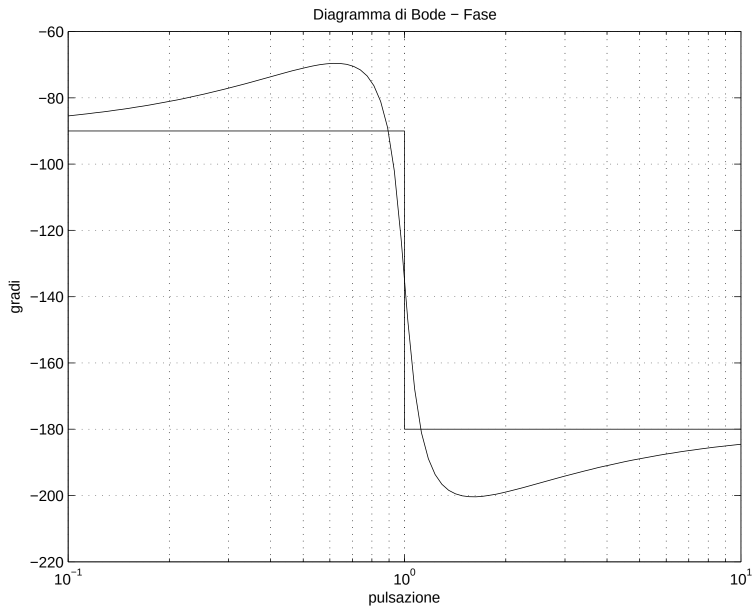
$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C')} = \frac{1}{0.1K_B(C')} \approx 0.1,$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Si trova quindi $K_B(C') \approx 10$. Assumiamo nel seguito $K_B(C') = 10$. La funzione di trasferimento del sistema in catena aperta diventa allora

$$C'(s)G(s) = 10\frac{1+s}{s\left(1 + 2\frac{1}{10}s + s^2\right)}.$$

Tracciamone il diagramma di Bode di ampiezza e fase





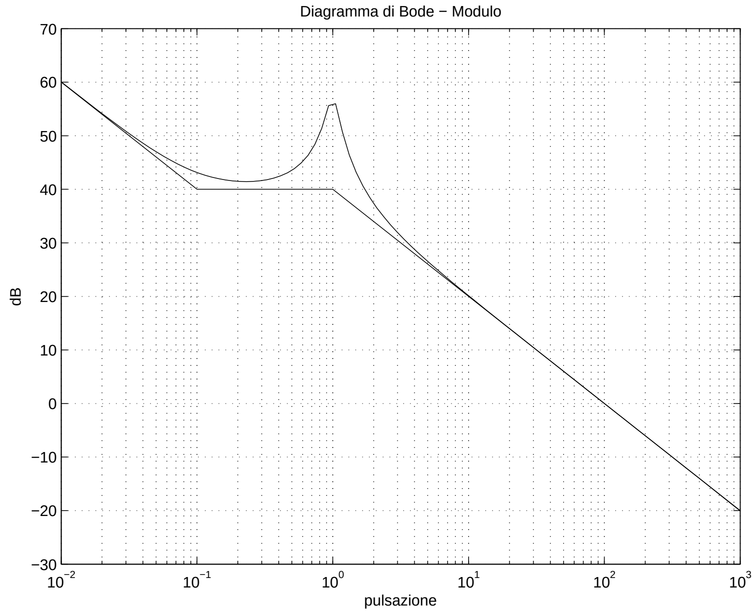
È immediato rendersi conto del fatto che $\omega_A \approx 10^{1/2}$ rad/sec, mentre $m_\psi(\omega_A^*) \approx 0°$. È quindi necessario ricorrere ad una rete anticipatrice. Procedendo "ad occhio", si trova che un modo semplice per conseguire gli obiettivi su pulsazione di attraversamento e margine di fase consiste nell'inserire uno zero in corrispondenza alla pulsazione 10^{-1} rad/sec e successivamente un polo ad una pulsazione maggiore di quella di attraversamento (ad esempio in -10^4 rad/sec). Ciò equivale ad assumere

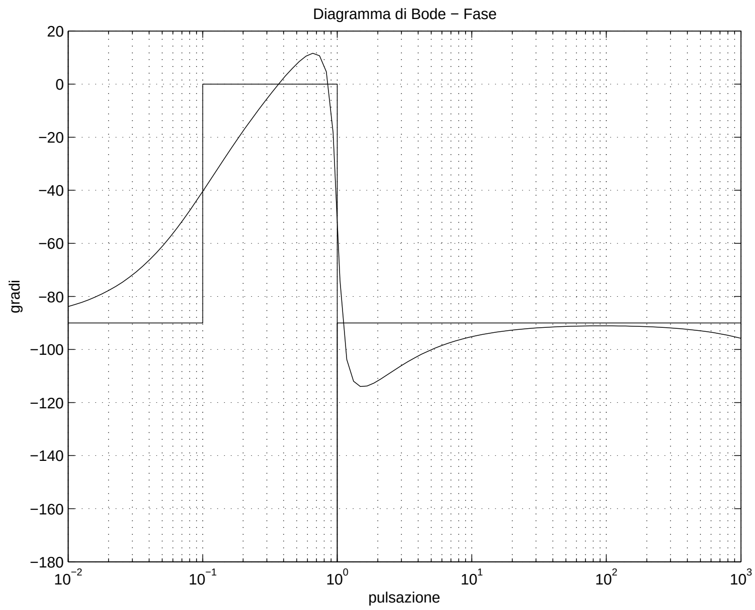
$$C''(s) = \frac{1+10s}{1+10^{-4}s}$$

e quindi il controllore finale è

$$C(s) = C'(s)C''(s) = 10\frac{1+10s}{s(1+10^{-4}s)}.$$

Allo scopo di verifica si traccia qui di seguito il diagramma della funzione di trasferimento in catena aperta finale, $C(s)G(s)$:





Esercizio 4. [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 - \frac{1}{4} = 0$$

a cui corrispondono le due radici semplici $\lambda_1 = 1/2$ e $\lambda_2 = -1/2$. Poiché $n = 2 > m = 1$, l'espressione della risposta impulsiva è del tipo

$$w(t) = \left[d_1 \left(\frac{1}{2} \right)^t + d_2 \left(-\frac{1}{2} \right)^t \right] \delta_{-1}(t).$$

Ora si trova da una parte

$$\begin{aligned} w(0) &= d_1 + d_2 \\ w(1) &= d_1 \left(\frac{1}{2}\right) + d_2 \left(-\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

dall'altra, valutando l'equazione alle differenze

$$w(t) - \frac{1}{4} w(t-2) = \delta(t) - \delta(t-1),$$

per $t = 0$ e $t = 1$ si trova $w(0) = 1, w(1) = -1$ e ciò porta a

$$w(t) = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^t \right] \delta_{-1}(t).$$

Teoria. [4.5 punti] Si veda il Capitolo 6 del libro di testo, pagina 164 e successive.