COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
5 Febbraio 2009 - A.A. 2008/2009

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo continuo non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)} - x_1(t)u(t),\\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = -3\frac{x_2(t)}{x_1^2(t)} + x_1^2(t)u(t) + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

i) Si determinino, al variare di $\bar{u}$ in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{R}_+$;

ii) per $\bar{u} = 1$, si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici).

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

i) Si determinino i sottospazi di raggiungibilità e di controllabilità a zero in k passi per $k = 1, 2, \dots$;

ii) si dica se il sistema ammette un controllore dead-beat e, in caso affermativo, se ne progetti uno che attribuisca al risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t),\\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]\, x(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che il risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari solo e^{-t} e e^{-2t};

ii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione K in modo tale che la risposta impulsiva del risultante sistema retroazionato presenti il solo modo e^{-t};

iii) si progetti, se possibile, uno stimatore il cui errore di stima converga, per $t \to +\infty$, come e^{-t}.

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un generico modello di stato $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n e non raggiungibile è algebricamente equivalente ad un modello di stato in forma standard di raggiungibilità.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$ in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} 0 &= \dfrac{x_{2e}}{x_{1e}} - x_{1e}\bar{u} = \dfrac{x_{2e} - x_{1e}^2\bar{u}}{x_{1e}}, \\ 0 &= -3\dfrac{x_{2e}}{x_{1e}^2} + x_{1e}^2\bar{u} + \bar{u}. \end{cases}$$

Analizziamo la prima equazione. Certamente x_{1e} deve essere non nullo e pertanto la prima equazione può essere riscritta nella forma

$$x_{2e} = x_{1e}^2\bar{u}$$

che, sostituita nella seconda equazione, porta a

$$0 = -3\bar{u} + x_{1e}^2\bar{u} + \bar{u} = \bar{u}(x_{1e}^2 - 2).$$

Se $\bar{u} = 0$ la seconda equazione è sempre soddisfatta, mentre la prima assicura che $x_{2e} = 0$. Di conseguenza, troviamo la famiglia infinita di punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, 0)$, con $x_{1e} \in \mathbb{R}, x_{1e} \neq 0$. Se invece $\bar{u} \neq 0$ la seconda equazione è soddisfatta per $x_{1e} = \pm\sqrt{2}$. Sostituendo nella prima equazione, si trovano i due punti di equlibrio $\mathbf{x}_e = (\sqrt{2}, 2\bar{u})$ e $\mathbf{x}_e = (-\sqrt{2}, 2\bar{u})$.

ii) [3.5 punti] Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per $u(t) = \bar{u} = 1$ tale sistema presenta come punti di equilibrio $\mathbf{x}_e = (\sqrt{2}, 2)$ e $\mathbf{x}_e = (-\sqrt{2}, 2)$ Il sistema linearizzato in un intorno di ciascuno dei precedenti punti assume la forma

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$\begin{aligned} F &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \left.\begin{bmatrix} -\frac{x_{2e}}{x_{1e}^2} - 1 & \frac{1}{x_{1e}} \\ 2x_{1e} + 6\frac{x_{2e}}{x_{1e}^3} & -3\frac{1}{x_{1e}^2} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1}; \\ G &= \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1} = \left.\begin{bmatrix} -x_{1e} \\ x_{1e}^2 + 1 \end{bmatrix}\right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}=1}. \end{aligned}$$

Pertanto nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (\sqrt{2}, 2)$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 1/\sqrt{2} \\ 5 \cdot \sqrt{2} & -3/2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix},$$

mentre nel punto di equilibrio $\mathbf{x}_e = (-\sqrt{2}, 2)$ abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -1/\sqrt{2} \\ -5\cdot\sqrt{2} & -3/2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [3.5 punti] Valutiamo prima i sottospazi di raggiungibilità. Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \neq \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Pertanto il sistema non è raggiungibile e il sottospazio raggiungibile coincide con $X_2^R = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$.

Valutiamo ora i sottospazi di controllabilità.

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_1}{2} - x_2 \\ -\frac{x_1}{2} + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \frac{x_1}{2} - x_2 = -\frac{x_1}{2} + 2x_2 + x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 - 3x_2 = x_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \rangle, \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 - \frac{x_1}{2} \\ \frac{x_1}{2} + x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Certamente $X_3^C = \mathbb{R}^3$ e quindi il sistema (che non è raggiungibile) è controllabile a zero in due passi.

ii) [4 punti] Poiché il sistema è sempre controllabile a zero esiste certamente un controllore dead-beat. Attribuiamo alla matrice K una struttura parametrica:

$$K = [\,a \quad b \quad c\,].$$

Di conseguenza, la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato diventa

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\, a \quad b \quad c \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 + a & -1 + b & c \\ -1/2 + a & 2 + b & 1 + c \end{bmatrix}.$$

Se calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice $F + gK$ troviamo

$$\Delta_{F+gK}(z) = z \cdot \left[z^2 - (b + c)z + (b - 3c - 1)\right].$$

Tale polinomio coincide con z^3 se e solo se

$$b + c = 0, \qquad \text{e} \qquad b - 3c - 1 = 0,$$

ovvero $b = 1/4 = -c$. Sostituendo nella matrice $F + gK$ si trova

$$F + gK = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 + a & -3/4 & -1/4 \\ -1/2 + a & 9/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente la matrice non potrà mai avere indice di nilpotenza unitario. Proviamo a vedere se esistono valori di a per cui l'indice di nilpotenza vale 2, ovvero $(F + gK)^2 = 0$. Si trova

$$(F + gK)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/4 - a & 0 & 0 \\ 3/4 + 3a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e tale matrice è nulla se e solo se $a = -1/4$. Pertanto il controllore

$$K = [\, -1/4 \quad 1/4 \quad -1/4 \,]$$

attribuisce alla matrice $F + gK$ indice di nilpotenza 2, tutti gli altri controllori dead-beat

$$K = [\, a \quad 1/4 \quad -1/4 \,], \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1/4\},$$

attribuiscono alla matrice $F + gK$ indice di nilpotenza 3.

Esercizio 3. i) [4 punti] È immediato verificare che il sistema è in forma standard di raggiungibilità e l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è -1. Infatti, le matrici (F, g) partizionate secondo la struttura di forma standard di raggiungibilità evidenziano un sottosistema $(F_{11}, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ raggiungibile, in quanto $\mathcal{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ha rango pari a 2, e $F_{22} = [-1]$.

Tale situazione è compatibile con quanto richiesto dal problema: infatti, per avere come modi esclusivamente e^{-t} ed e^{-2t} la matrice di stato del sistema retroazionato $F + gK$ deve avere come polinomio minimo $\psi_{F+gK}(s) = (s + 1)(s + 2)$, che corrisponde a due possibili scelte per Δ_{F+gK} ossia $p^A_{F+gK}(s) = (s + 1)(s + 2)^2$ e $p^B_{F+gK}(s) = (s + 1)^2(s + 2)$. Dato il vincolo imposto dal sottosistema non raggiungibile, $\Delta_{F+gK}(s) = \Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)\Delta_{F_{22}}(s)$, i polinomi compatibili allocabili per $\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)$ sono $p^A_1(s) = (s + 2)^2$ e $p^B_1(s) = (s + 1)(s + 2)$.

Attraverso una generica matrice di retroazione partizionata in modo conforme alla Forma standard, $K = [K_1 \mid K_2] = [a\ b \mid c]$, si ottiene:

$$F_{11} + g_1 K_1 = \begin{bmatrix} 1+a & 1+b \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s) = s^2 - s(1+a) - 2(1+b).$$

Scegliendo la soluzione $p_1^A(s)$ si ottiene $a = -5$, $b = -3$, ossia $K = [\,-5 \quad -3 \quad c\,]$. Occorre ora valutare la molteplicità geometrica dell'autovalore di molteplicità algebrica 2 (in questo caso -2):

$$s_{-2} = \dim\ker(-2I - F - gK) = \dim\ker \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1-c \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che essa vale 1 per ogni valore di c. Tale soluzione porta a un unico blocco di dimensione 2 relativo a -2 nella forma di Jordan, che non è compatibile con la richiesta fatta sui modi del sistema.

Alternativamente, scegliendo $p_1^B(s)$ si perviene a una seconda soluzione:

$$K = [\,-4 \quad -2 \quad c\,].$$

Imponendo poi che la molteplicità geometrica dell'autovalore di molteplicità algebrica 2 (in questo caso -1) sia pari a 2, ossia che la forma di Jordan corrispondente presenti due miniblocchi di dimensione 1, si ottiene, per $c = 0$,

$$s_{-1} = \dim\ker(-I - F - gK) = \dim\ker \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1-c \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto il controllore

$$K = [\,-4 \quad -2 \quad 0\,]$$

attribuisce al risultante sistema retroazionato solo i due modi assegnati.

ii) [3.5 punti] In generale, i modi presenti nella risposta impulsiva del sistema si possono studiare facilmente calcolando la funzione di trasferimento $W(s)$ (che ne costituisce la trasformata) e studiandone i poli. Calcoliamo dapprima la funzione di trasferimento del sistema (F, g, H) che, vista la non raggiungibilità del sistema, coincide con la funzione di trasferimento del sottosistema raggiungibile $(F_{11}, H_1, g_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\,1 \quad 0\,] \right)$:

$$W(s) = H_1(sI_2 - F_{11})^{-1} g_1 = \frac{s}{(s+1)(s-2)}.$$

Applicando l'antitrasformata di Laplace a $W(s)$ si vede subito che la corrispondente risposta impulsiva presenta i modi e^{-t} ed e^{2t}.

La retroazione permette di modificare liberamente il denominatore (lasciando inalterato il numeratore) in modo tale da avere, alla fine, un unico polo in -1, condizione necessaria e sufficiente per risolvere il problema posto. Si tratta quindi di introdurre, attraverso la matrice di retroazione $K = [K_1 \mid K_2] = [a\ b \mid c]$, partizionata in modo conforme alla forma standard di raggiungibilità, una cancellazione zero-polo che lasci al denominatore il solo fattore $s+1$. Ciò si ottiene imponendo a denominatore il seguente polinomio $p_1(s) = s(s+1)$ e ottenendo in tal modo

$$W_K(s) = H_1(sI_2 - F_{11} - g_1K_1)^{-1}g_1 = \frac{s}{(s+1)(s-2)}.$$

Operando, come al punto precedente, sulla sola parte raggiungibile del sistema si trova

$$\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s) = s^2 - (1+a)s - 2(1+b).$$

Equagliando i coefficienti di $\Delta_{F_{11}+g_1K_1}(s)$ a quelli di $p_1(s)$ si perviene alla soluzione:

$$K = \begin{bmatrix} -2 & -1 & c \end{bmatrix},$$

con c arbitrario.

iii) [3.5 punti] La specifica richiesta equivale a chiedere che l'evoluzione (libera) dell'errore di stima $e(t)$, per valori molto grandi di t (e quindi asintoticamente), possa essere descritta ricorrendo al solo modo e^{-t}. In altre parole, è richiesto che i modi di $(F + LH)$ soddisfino i seguenti requisiti:

1. tra di essi ci sia il modo e^{-t};
2. qualsiasi altro modo $m(t)$ sia asintoticamente irrilevante rispetto a e^{-t}, nel senso che

$$\frac{m(t)}{e^{-t}} \to 0 \quad \text{per } t \to +\infty,$$

ovvero e^{-t} sia il modo dominante.

Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui rango è pari a 3. La coppia (F, H) è pertanto completamente osservabile ed è quindi possibile attribuire alla matrice $F + LH$ una arbitraria terna di autovalori.

Date le condizioni richieste dal problema, scegliamo ad esempio uno spettro complessivo pari a

$$\sigma(F + LH) = \{-1, -2, -2\}.$$

In questo modo, infatti si hanno due modi (siano essi entrambi e^{-2t} oppure l'uno e^{-2t} e l'altro te^{-2t}) che convergono a zero prima di e^{-t}, in aggiunta al modo dominante e^{-t}.

Scegliamo una matrice L parametrica, $L = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e calcoliamo la generica matrice $F + LH$,

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 2+b & 0 & -1 \\ c & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è dato dalla seguente espressione:

$$\Delta_{F+LH}(s) = s^3 - a\ s^2 - (a + b + c + 3)\ s - (b - c + 2).$$

Eguagliando i coefficienti di $\Delta_{F+LH}(s)$ a quelli del polinomio desiderato $p(s) = (s + 1)(s + 2)^2$, si ottiene lo stimatore richiesto

$$L = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini "Appunti di Teoria dei Sistemi", Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.