COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI - 54 ore
22 Dicembre 2009

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (4-a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (6+a)\frac{dy(t)}{dt} + (3+2a)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 9u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema;

ii) per $a = 0$ si determini, se esiste, l'espressione della risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = [1 + \cos(3t)]\, \delta_{-1}(t);$$

iii) per $a = 3$ si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema e la si tracci (almeno approssimativamente). Si determinino, inoltre, tempo di salita, tempo di assestamento e (se esiste) la sovraelongazione.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\frac{(s+0.1)\left(s^2 - 10s + 10^4\right)}{s^2(s+100)^2}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e se ne studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

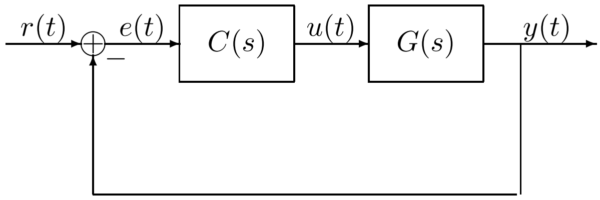
$$P(s) = \frac{s+10}{s(s-8)}.$$

i) Si progetti un controllore di tipo puramente proporzionale K, in modo tale che la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{KP(s)}{1+KP(s)}$$

del risultante sistema retroazionato sia BIBO stabile con due poli complessi coniugati di pulsazione $\omega_n = 10$ rad/s;

ii) successivamente, con riferimento alla funzione di trasferimento $G(s)$, ottenuta al punto i), si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il isultante sistema retroazionato



a) sia di tipo 0 con con errore di regime permanente al gradino $e_{rp}^{(1)}$ all'incirca pari a $e_{rp}^{*} = 0.091$, e b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ sia all'incirca $\omega_A^{*} = 10^3$ rad/sec c) con margine di fase (del sistema in catena aperta) sia almeno pari a 90^0.

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si determinino le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per sistemi di tipo 0, 1 e 2.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$d(s) = s^3 + (4-a)s^2 + (6+a)s + (3+2a) = 0.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 6+a \\
2 & 4-a & 3+2a \\
1 & \dfrac{-a^2-4a+21}{4-a} & 0 \\
0 & 3+2a & 0
\end{array}$$

Ora la prima colonna della tabella di Routh ha tutti gli elementi (non nulli e) di ugual segno se e solo se valgono le seguenti diseguaglianze:

$$4-a>0 \qquad -a^2-4a+21>0 \qquad 3+2a>0.$$

La prima e la terza diseguaglianza portano a $-3/2 < a < 4$, per valutare la seconda determiniamo le radici dell'equazione di secondo grado $-a^2-4a+21=0$. Tali radici sono $a=-7$ e $a=3$. Da ciò consegue che la seconda diseguaglianza è soddisfatta se e solo se $-7<a<3$. Pertanto mettendo assieme tutte le diseguaglianze, si trova che $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $-3/2<a<3$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $-3/2<a<3$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2+9}{s^3+(4-a)s^2+(6+a)s+(3+2a)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri immaginari coniugati. Per questa ragione una semplificazione può aver luogo tra numeratore e denominatore se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore risulta multiplo di s^2+9. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$s^3+(4-a)s^2+(6+a)s+(3+2a) = (s^2+9)(s+p), \qquad \exists\, p \in \mathbb{R}.$$

Si trova quindi l'eguaglianza

$$s^3+(4-a)s^2+(6+a)s+(3+2a) = s^3+ps^2+9s+9p, \qquad \exists\, p \in \mathbb{R},$$

che porta a

$$\begin{cases} 4-a &= p \\ 6+a &= 9 \\ 3+2a &= 9p. \end{cases}$$

Le precedenti equazioni sono soddisfatte se e solo se $a=3$ e $p=1$. Per tali valori si trova

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se $-3/2 < a \leq 3$.

ii) [2 punti] Per $a=0$ il sistema è asintoticamente stabile, quindi certamente esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato (in particolare, in assenza di evoluzione libera) ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = W(0) + |W(j3)| \cdot \cos(3t + \arg W(j3)).$$

Si trova

$$W(j\omega) = \frac{9-\omega^2}{-j\omega^3 - 4\omega^2 + j6\omega + 3}$$

e quindi

$$W(0) = 3$$

e

$$W(j3) = 0.$$

Di conseguenza, $y_{rp}(t) = 3$.

iii) [3 punti] Per $a=3$ la funzione di trasferimento del sistema diventa

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$W_{-1}(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$W_{-1}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

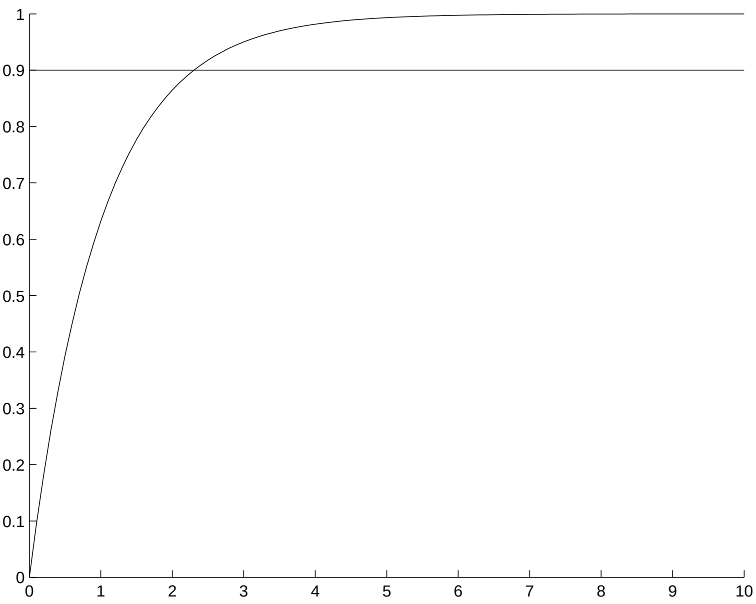
e ad essa corrisponde la funzione del tempo

$$w_{-1}(t) = \left[1 - e^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$

Si tratta banalmente della risposta al gradino monotona di un sistema del primo ordine, per la quale non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e valgono entrambi

$$t_r = t_s = \frac{\ln 10}{1} \approx 2.31s.$$

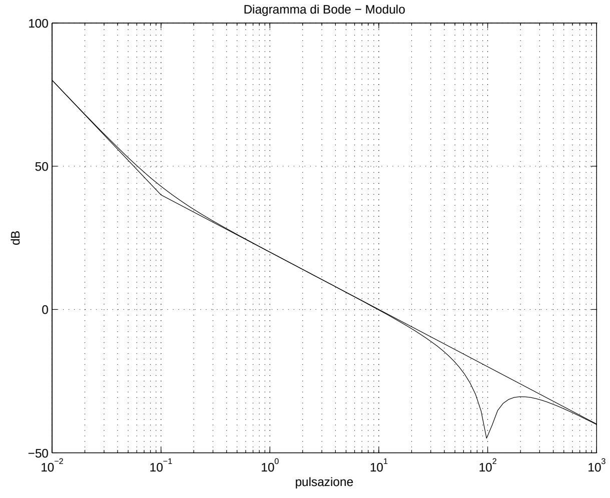
Il grafico della risposta al gradino è il seguente:

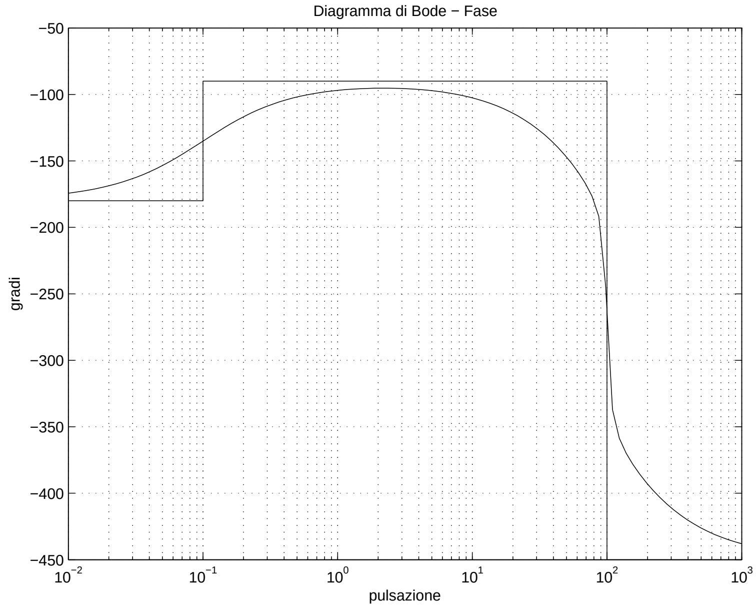


Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

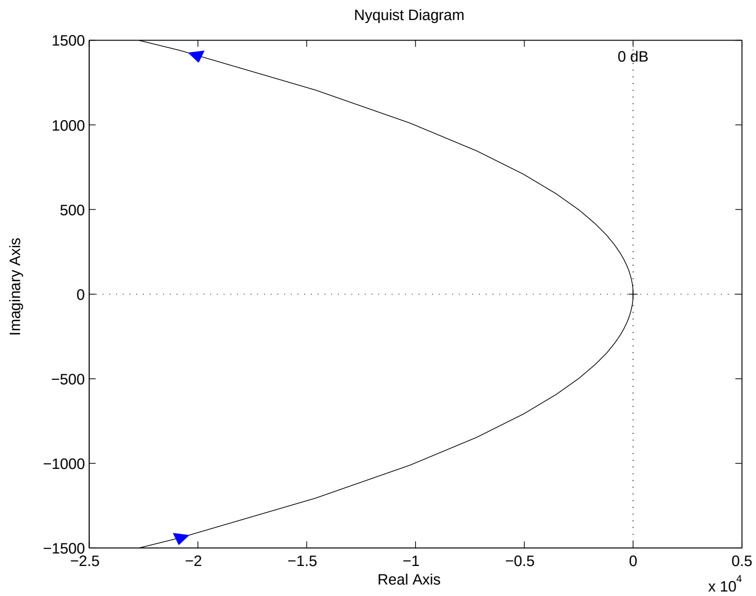
$$G(s) = 10\frac{(s+0.1)\left(s^2-10s+10^4\right)}{s^2(s+100)^2} = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1-2\frac{1}{20}\frac{s}{100}+\frac{s^2}{100^2}\right)}{s^2\left(1+\frac{s}{100}\right)}.$$

Pertanto $K_B = 1$ e la risposta in frequenza presenta un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), uno zero reale negativo in -0.1 ($1/T' = 0.1$ e $\mu' = 1$), un polo reale negativo in -100 ($1/T = 10$ e $\mu = 2$) ed una coppia di zeri complessi coniugati con $\omega_n' = 100$ e $\xi' = -0.05$ (e $|\xi'| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due zeri complessi coniugati hanno smorzamento negativo, ovvero parte reale positiva, e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

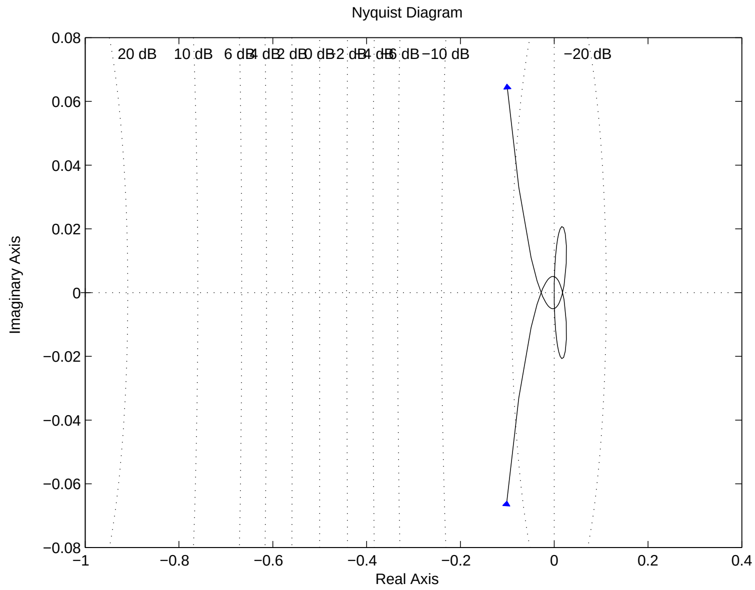




ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma arriva, per $\omega \to +\infty$, con fase di $-450^\circ = -90^\circ$, tuttavia per motivi puramente numerici questo fatto non è ben visibile dal diagramma precedente. Riportiamo, pertanto, di seguito il dettaglio del diagramma in prossimità dell'origine.



Una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito (tracciando un angolo giro in verso orario dal punto di pulsazione $\omega = -\varepsilon$ al punto di pulsazione $\omega = \varepsilon$), per valutare quanti giri il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ è necessario stimare se il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trovi a sinistra o a destra del punto $-1 + j0$. Dalla valutazione del diagramma di Bode si vede che quando la fase assume il valore $-180°$ il modulo si trova molto al di sotto del valore 0 dB. Pertanto l'attraversamento del semiasse reale negativo avviene alla destra del punto critico. Chiudendo il diagramma al finito (da $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ in senso orario) si trova che esso non compie nessun giro attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 0$. Poiché $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$, la condizione $N = 0$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [2 punti] La funzione di trasferimento del sistema ottenuto retroazionando $P(s)$ con un'azione proporzionale K in catena aperta è data da

$$G(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)} = \frac{K(s + 10)}{s(s - 8) + K(s + 10)} = \frac{K(s + 10)}{s^2 + (K - 8)s + 10K}.$$

Trattandosi di una funzione di trasferimento il cui polinomio al denominatore (in una rappresentazione irriducibile) ha grado 2, possiamo utilizzare Cartesio e dire che il sistema è BIBO se e solo se $K > 8$. Se interpretiamo il polinomio al denominatore con un termine trinomio è chiaro che l'unico valore di K che permette a tal termine di essere relativo ad una coppia di poli con $\omega_n = 10$ rad/s è $K = 10$. Per tale valore di K il polinomio diventa $s^2 + 2s + 100$ ed effettivamente si tratta di un polinomio con due radici complesse coniugate. Pertanto $K = 10$ e

$$G(s) = 10\frac{s + 10}{s^2 + 2s + 100}.$$

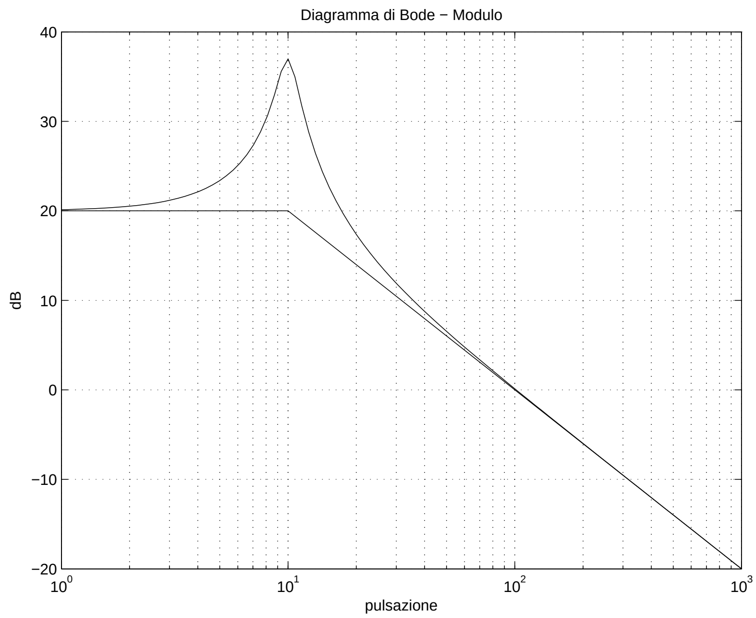
i) [3.5 punti] Il sistema ottenuto per retroazione unitaria dalla sola $G(s)$ è già di tipo 0. Pertanto non è necessario introdurre poli nell'origine nella funzione di trasferimento in catena aperta. L'errore di regime permanente in questo caso assume l'espressione

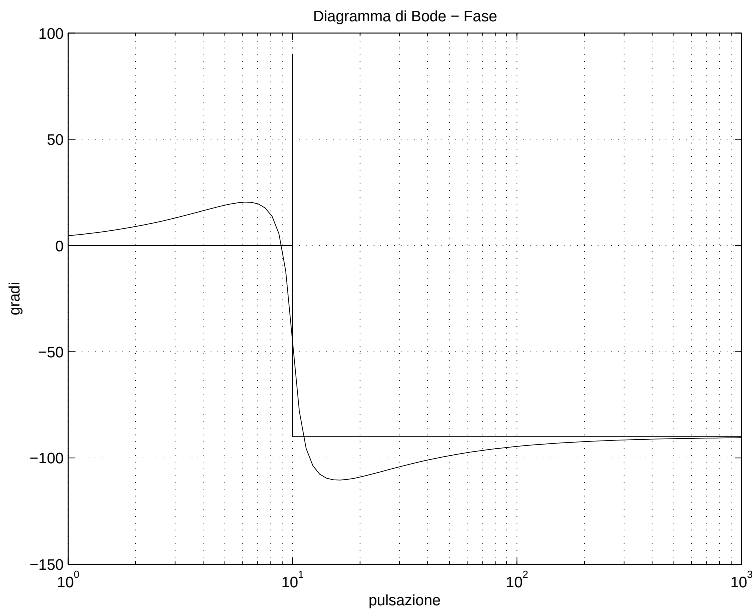
$$e_{rp}^{(1)} = \frac{1}{1 + K_B(C')K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore è 1, mentre $K_B(C')$ è il guadagno di Bode del controllore. Imponendo quindi

$$e_{rp}^{(1)} = \frac{1}{1 + K_B(C')} \approx e_{rp}^{*} = 0.091,$$

si trova $K_B(C') \approx 10$. Scegliamo, dunque, $K_B(C') = 10$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_B(C')G(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.

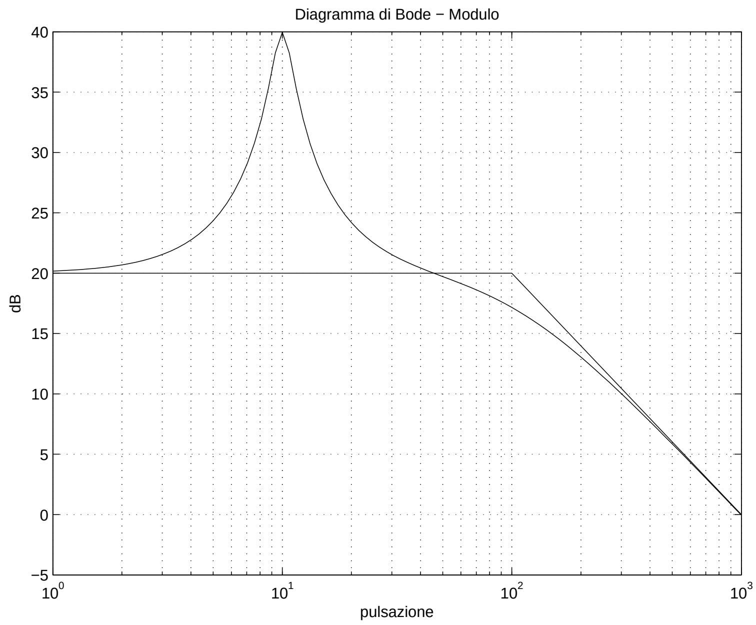


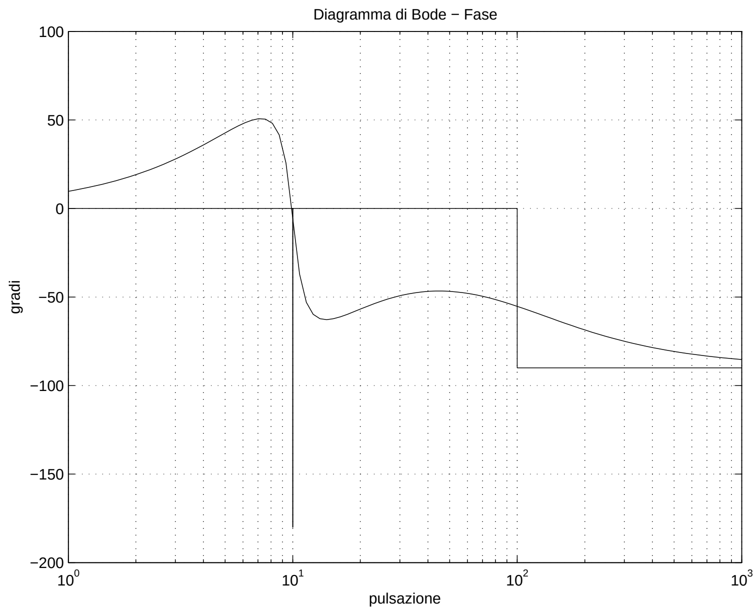


La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 10^2$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è circa 90^o. Se inseriamo un altro zero in -10^1 e successivamente un polo in -10^2, otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto il controllore desiderato è

$$C(s) = 10\frac{1 + 10^{-1}s}{1 + 10^{-2}s}.$$

Il risultato finale è illustrato nelle figure sottostanti.





[Soluzione alternativa: $C(s) = 10\frac{1+s}{1+10^{-1}s}$.]

Teoria. [4.5 punti] Si veda il Capitolo 6 del libro di testo, pagina 164 e successive.