COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
17 Luglio 2009 - 54 ore

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2a+1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (3a+1)\frac{dy(t)}{dt} + (a+1)y(t) = 2\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$;

ii) per $a = 0$ determinare le condizioni iniziali, se esistono, in corrispondenza a cui esiste la risposta di regime permanente al segnale $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t)$;

iii) per $a = 1$ si determini tipo e relativo errore di regime permanente del sistema.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^4 \ \frac{(s+0.1)\,(s^2-2s+10)}{s(s^2+20s+10^4)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1+s}{s^2+5s+100},$$

si progetti un controllo in retroazione in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa lineare unitaria) pari a $e^*_{rp} = 0.1$;

2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 1000$ rad/sec e

3) abbia margine di fase pari almeno a 80^o.

Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Assumendo note le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per un sistema in catena aperta, si determini le analoghe caratterizzazioni per un sistema in catena chiusa di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)},$$

ottenuto per retroazione unitaria negativa di un sistema di funzione di trasferimento $G(s) \in \mathbb{R}(s)$, strettamente propria con $G(0) \neq 0$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + (2a+1)s^2 + (3a+1)s + (a+1).$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 3a+1 \\
2 & 2a+1 & a+1 \\
1 & \dfrac{2a(3a+2)}{2a+1} & 0 \\
0 & a+1 & 0
\end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $2a+1>0$, $a+1>0$ e $a(3a+2)>0$. Ciò si verifica se e solo se $a>0$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a>0$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = 2\frac{s^2+1}{s^3+(2a+1)s^2+(3a+1)s+(a+1)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri collocati in $\pm j$. Per questa ragione l'unica possibilità di semplificazione tra numeratore e denominatore è quella relativa al fattore s^2+1 ed essa si verifica se e solo se per qualche valore di a il polinomio al denominatore è multiplo di s^2+1. In altre parole se e solo se per qualche valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$s^3+(2a+1)s^2+(3a+1)s+(a+1) = (s^2+1)(s+\lambda) = s^3+\lambda s^2+s+\lambda, \qquad (1)$$

per qualche numero reale λ. Si vede subito che la precedente identità è soddisfatta se e solo se $2a+1=\lambda=a+1$ e $3a+1=1$. In altre parole ciò è vero se e solo se $a=0$ e $\lambda=1$. Per tale valore di a,

$$W(s) = 2\frac{s^2+1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{2}{s+1}.$$

Ne consegue, visto che abbiamo a che fare con una rappresentazione irriducibile ed il polinomio al denominatore è di Hurwitz, che il sistema è BIBO stabile per $a=0$ e pertanto si ha BIBO stabilità se e solo se $a \geq 0$.

ii) [3.5 punti] Per $a=0$ sappiamo già, dal punto precedente, che il sistema è BIBO stabile ma non asintoticamente stabile, quindi esiste la risposta di regime permanente (forzata) ad ogni segnale sinusoidale a condizione che le condizioni iniziali del sistema portino ad un'evoluzione libera convergente a zero. Per $a = 0$ sappiamo che il polinomio $d(s)$ dell'equazione caratteristica del sistema fattorizza nella forma $d(s) = (s+1)\left(s^2+1\right)$. Di conseguenza le radici del sistema sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_{2,3} = \pm j$ (tutte semplici), e il sistema presenta i modi elementari (reali)

$$e^{-t}, \cos t, \sin t.$$

Ma allora, l'evoluzione libera converge a zero se e solo se essa coinvolge solo il modo e^{-t}, ovvero è del tipo $y_\ell(t) = ce^{-t}$. Da ciò segue che le condizioni iniziali sono del tipo

$$y(0^-) = y_\ell(0) = c, \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0)}{dt} = -c, \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = \frac{d^2y_\ell(0)}{dt^2} = c.$$

iii) [2.5 punti] Per $a = 1$ abbiamo a che fare con un sistema BIBO stabile di funzione di trasferimento

$$W(s) = 2\frac{s^2+1}{s^3+3s^2+4s+2}.$$

È immediato verificare che $W(0) = 1$ è quindi il sistema è almeno di tipo 1. Il calcolo della derivata della $W(s)$ in $s = 0$ porge

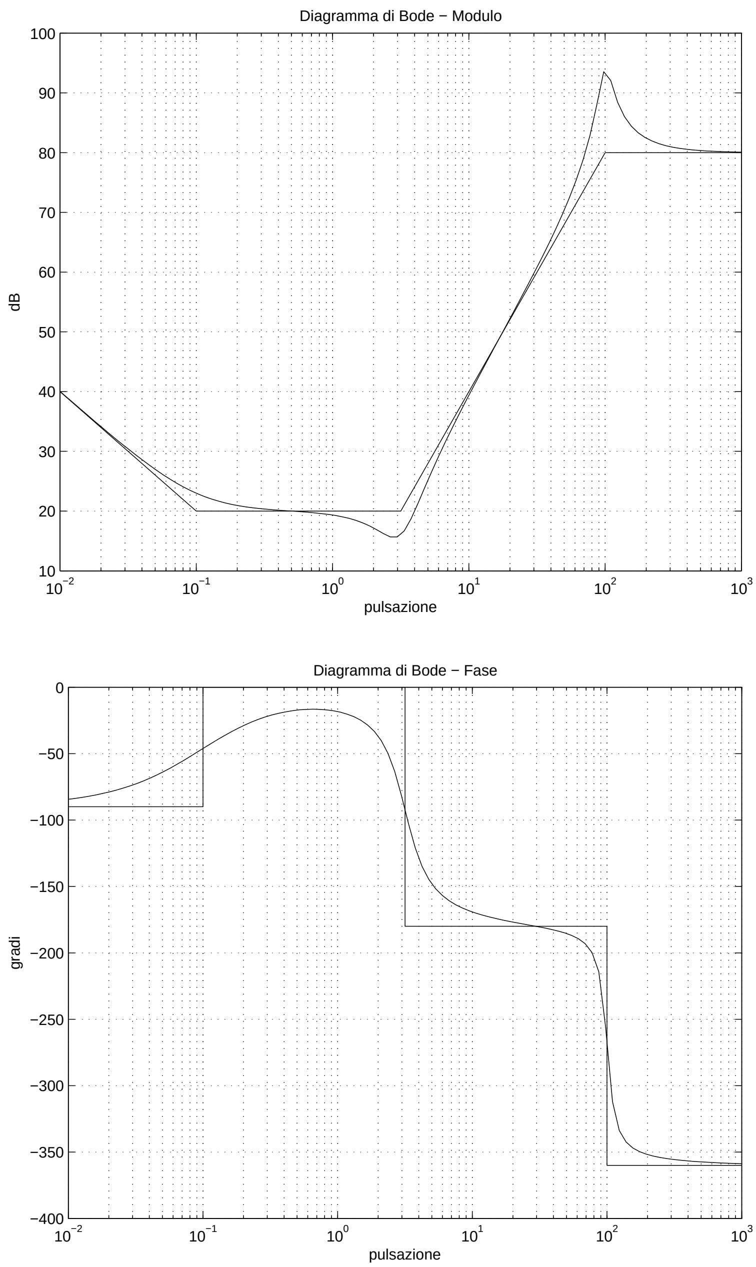
$$\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{4s(s^3+3s^2+4s+2)-(2s^2+2)(3s^2+6s+4)}{ds}\right|_{s=0} = -2.$$

Pertanto il sistema è di tipo 1 e $e_{rp}^{(2)} = -\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} = 2.$

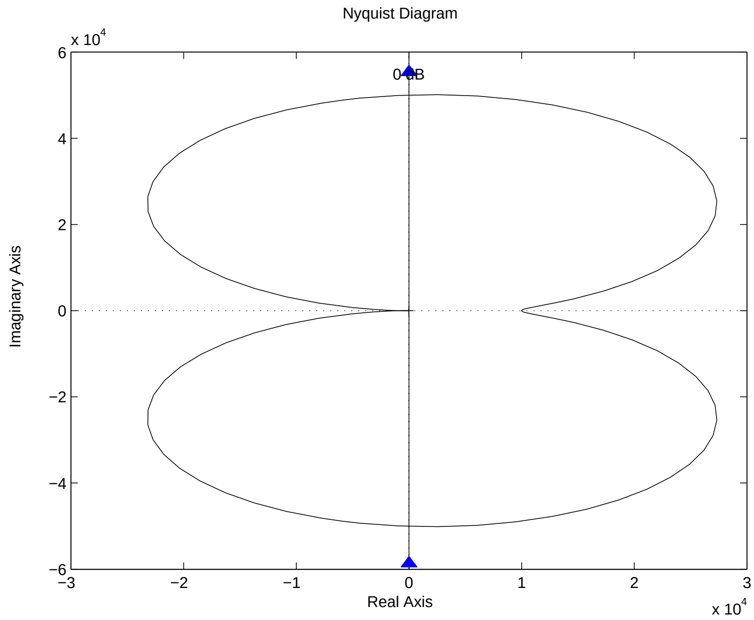
Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1-2\frac{1}{\sqrt{10}}\frac{s}{\sqrt{10}}+\frac{s^2}{(\sqrt{10})^2}\right)}{s\left(1+2\cdot\frac{1}{10}\frac{s}{10^2}+\frac{s^2}{(10^2)^2}\right)}.$$

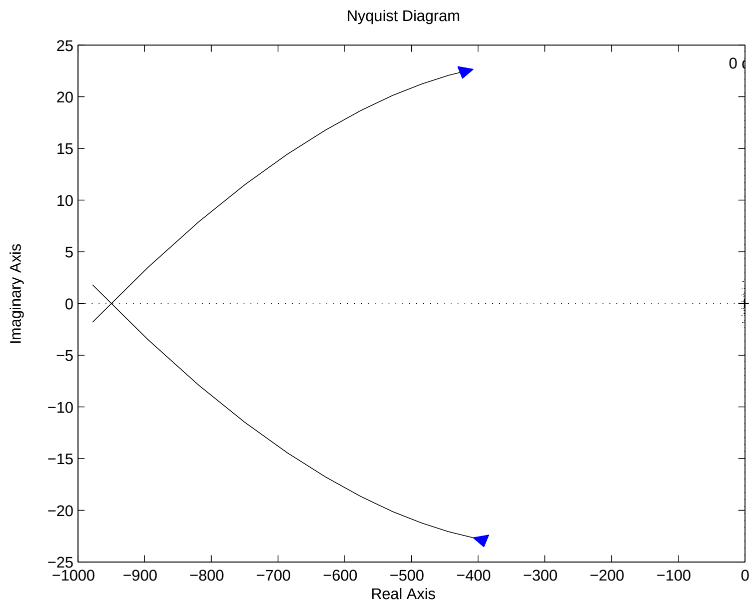
Pertanto $K_B = 1$ e la risposta in frequenza presenta un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), uno zero reale negativo in -10^{-1} ($1/T = 10^{-1}$ e $\mu = 1$), una coppia di zeri complessi coniugati con $\omega_n' = \sqrt{10} = 10^{1/2}$ e $\xi' = -1/\sqrt{10}$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$) ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10^2$ e $\xi = 0.1$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due zeri complessi coniugati hanno parte reale positiva e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [5.5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



La figura illustra malamente l'andamento qualitativo del grafico che parte per $\omega = 0^+$ lungo il semiasse immaginario negativo, arriva vicino all'origine, ruotando in verso antiorario, e poi invertendo la rotazione descrive una specie di cerchio che lo porta a terminare (per $\omega = +\infty$) sul semiasse reale positivo (nel punto 10^4). Il diagramma attraversa il semiasse immaginario negativo molto alla sinistra del punto $-1 + j0$, come è possibile dedurre dal diagramma di Bode, in quanto l'attraversamento della fase $-180°$ avviene quando il diagramma di Bode del modulo si trova molto al di sopra del"asse a 0 dB (si veda il dettaglio del diagramma di Nyquist nella figura sottostante).



Il diagramma di Nyquist compie due giri (in verso orario) attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = -2$. Poichè $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$, la condizione

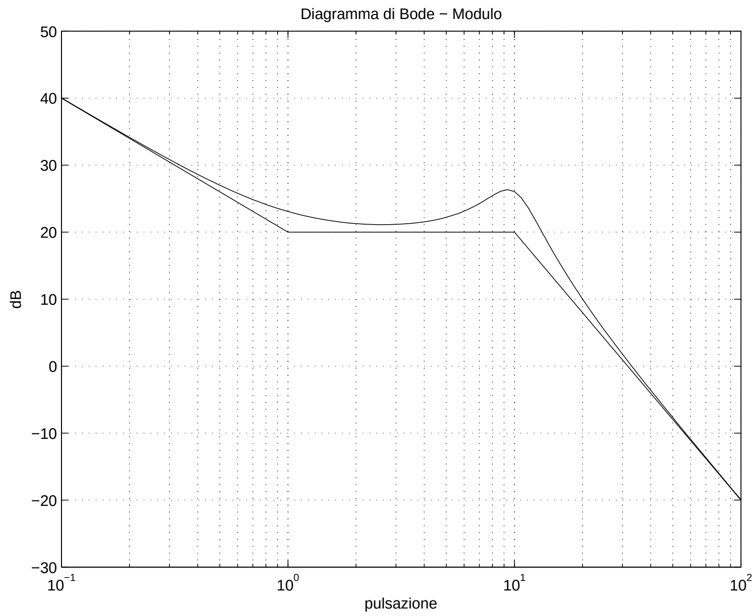
$N = -2$ implica $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli reali positivi.

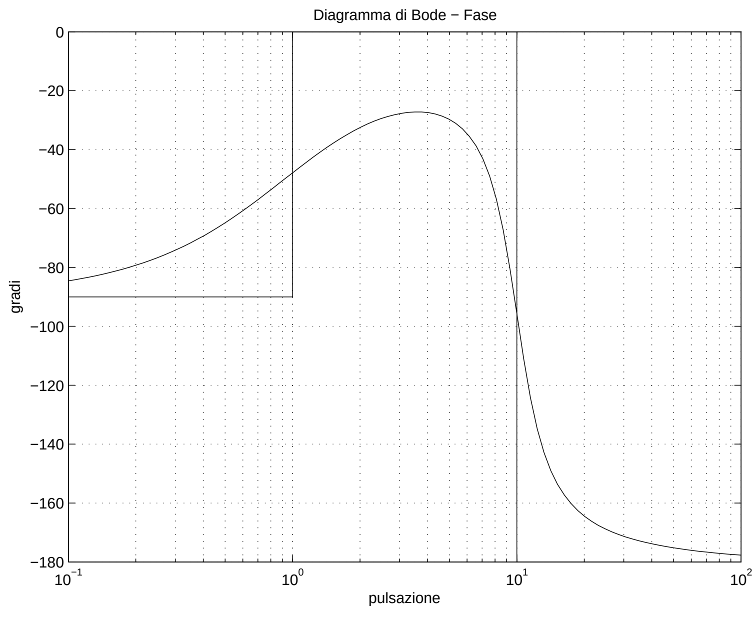
Esercizio 3. [5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)0.1} \approx 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \approx 100$. Prendiamo $K_B(C) = 100$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{100}{s}$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:



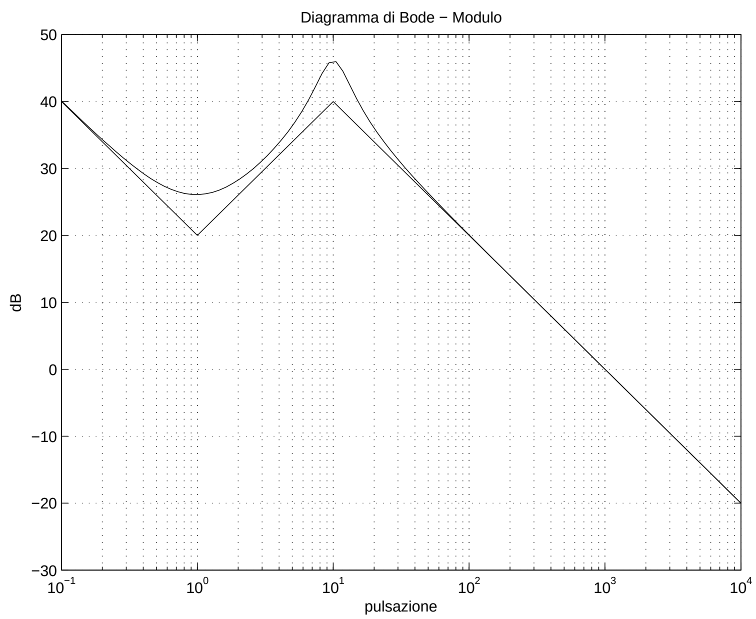


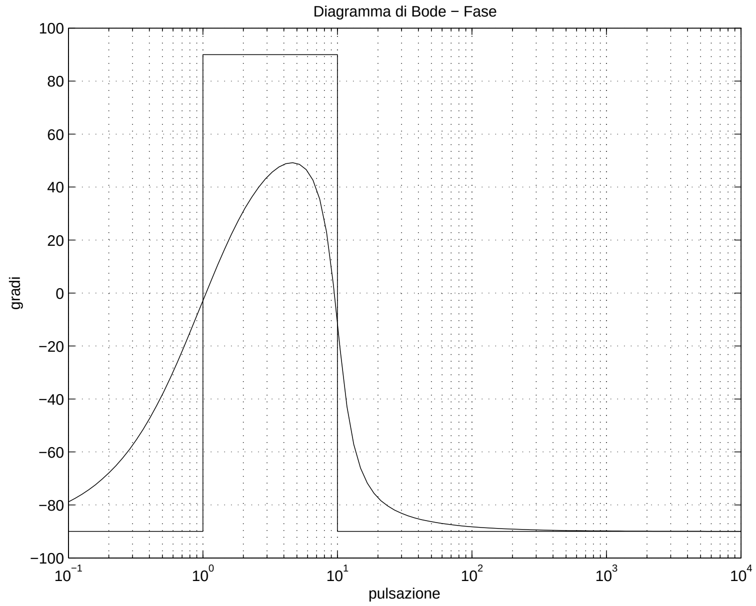
Si trova $10^{3/2}$ rad/s $\approx \omega_A < \omega_A^* = 1000$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180^\circ + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 80^\circ$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 1000$ rad/s e di sollevare la fase di almeno 80°. Va sottolineato che il vincolo sull'errore di regime permanente mi impedisce di modificare il guadagno di Bode del controllore e pertanto potrò agire solo introducendo zeri e poli.

Una soluzione "ad occhio" può essere ottenuta introducendo opportunamente uno zero prima della pulsazione di attraversamento in modo tale da soddisfare entrambi i requisiti su pulsazione di attraversamento e fase. Tenuto conto del fatto che comunque il controllore ha già un polo nell'origine, il risultante controllore $C(s)$ sarà comunque proprio e quindi non è necessario introdurre ulteriori poli. Introducendo semplicemente uno zero in -1, ovvero un fattore $(1+s)$, osservo che i diagrammi di Bode di

$$C(s)G(s) = 100\frac{1+s}{s} \cdot 0.1\frac{1+s}{1+2\cdot 0.25\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}}$$

diventano





e pertanto tutte le specifiche sono soddisfatte. Pertanto un controllore che consegue l'obiettivo desiderato è

$$C(s) = 100\frac{1+s}{s}.$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 9 del libro di testo, pagine 243-244.