

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

21 Settembre 2009

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{5}{4} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}.$$

- i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema;
- ii) si determini, se esiste, l'espressione della risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \left[1 + \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right] \delta_{-1}(t)$$

ed alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0, \quad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1, \quad \frac{d^2 y(0^-)}{dt^2} = -1;$$

- iii) si determini l'espressione della risposta al gradino del sistema e la si tracci (almeno approssimativamente). Si determinino, inoltre, l'istante in cui la risposta al gradino raggiunge il suo valore massimo e la massima sovraelongazione percentuale.

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

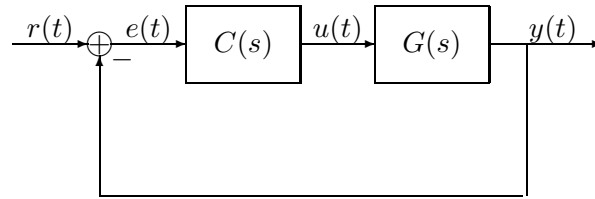
$$G(s) = \frac{(s-1)(s^2 - 100s + 10^4)}{s^2(s+10)}.$$

- i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e se ne studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, determinando l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 100 \frac{s+1}{(s+10)^2}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PI

$$C(s) = C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \in \mathbb{R}[s]$$

in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda alla rampa unitaria in ingresso con errore di regime permanente non superiore a $e_{rp}^* = 10^{-1}$, b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega_A^* = 10^{5/2}$ rad/sec e c) il margine di fase (del sistema in catena aperta) sia inferiore a 90^0 .

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s = s \left(s^2 + s + \frac{5}{4} \right).$$

Da ciò emerge chiaramente che si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, in quanto ha una radice dell'equazione caratteristica in 0.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s}{s^3 + s^2 + \frac{5}{4}s} = \frac{1}{s^2 + s + \frac{5}{4}}.$$

Di conseguenza il sistema è banalmente BIBO stabile.

ii) [4 punti] Come visto al punto precedente, si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, ma BIBO stabile. Per questa ragione esiste la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale assegnato se e solo se l'evoluzione libera in corrispondenza alle specifiche condizioni iniziali assegnate risulta convergente a zero. Andiamo quindi a valutarla. I modi del sistema sono $1, e^{-t/2} \cos t, e^{-t/2} \sin t$, e pertanto l'espressione della generica evoluzione libera d'uscita sarà

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t/2} \cos t + c_3 e^{-t/2} \sin t.$$

Il calcolo delle derivate di ordine 1 e 2 della $y_\ell(t)$ porge:

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell}{dt} &= (c_3 - c_2/2) e^{-t/2} \cos t + (-c_3/2 - c_2) e^{-t/2} \sin t \\ \frac{d^2 y_\ell}{dt^2} &= (-c_3 - 3/4 c_2) e^{-t/2} \cos t + (-3/4 c_3 + c_2) e^{-t/2} \sin t. \end{aligned}$$

Se ora imponiamo il soddisfacimento delle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} 0 &= y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 + c_2, \\ 1 &= \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = \left. \frac{dy_\ell(t)}{dt} \right|_{t=0^-} = c_3 - c_2/2, \\ -1 &= \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-} = \left. \frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2} \right|_{t=0^-} = -c_3 - 3/4 c_2, \end{aligned}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0 \quad \text{e} \quad c_3 = 1.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-t/2} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esiste allora la risposta di regime permanente al segnale $u(t)$ ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = W(0) + |W(j/2)| \cdot \cos(t/2 + \arg W(j/2)).$$

Si trova

$$W(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j\omega + \frac{5}{4}}$$

e quindi

$$W(0) = \frac{4}{5}$$

e

$$|W(j/2)| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \arg W(j/2) = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = -0.4636 \text{ rad.}$$

iii) [4 punti] La trasformata di Laplace della risposta al gradino è

$$Y_f(s) = W(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s \left(s^2 + s + \frac{5}{4} \right)}.$$

La decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ porta a

$$\begin{aligned} Y_f(s) &= \frac{4}{5} \frac{1}{s} - \frac{4}{5} \frac{s+1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{4}{5} \frac{1}{s} - \frac{4}{5} \left\{ \frac{s+1/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \right\} \\ &= \frac{4}{5} \frac{1}{s} - \frac{4}{5} \frac{s+1/2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} - \frac{2}{5} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \end{aligned}$$

e ad essa corrisponde la funzione del tempo

$$y_f(t) = \left[\frac{4}{5} - \frac{4}{5} e^{-t/2} \cos t - \frac{2}{5} e^{-t/2} \sin t \right] \delta_{-1}(t).$$

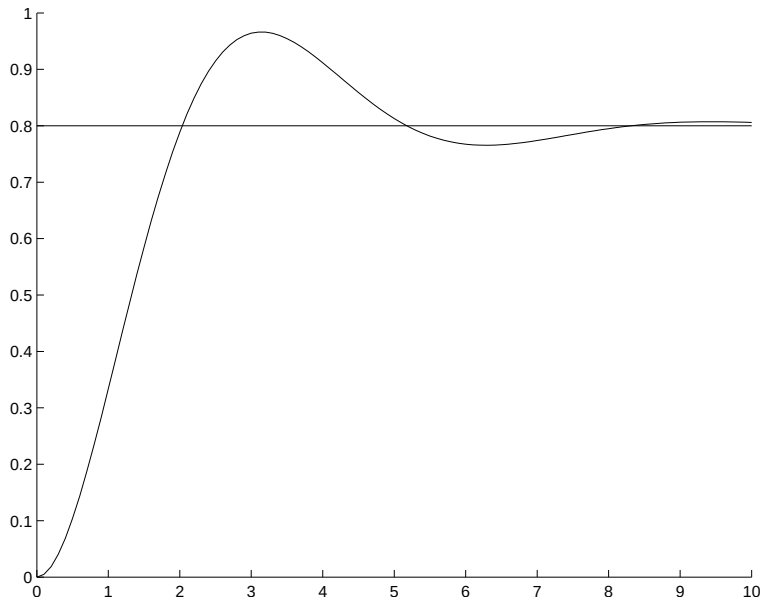
La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy_f}{dt} = e^{-t/2} \sin t.$$

Chiaramente tale derivata è inizialmente non negativa, e successivamente si annulla in corrispondenza a tutti i punti del tipo $t_k = k\pi$, con k intero positivo. Pertanto la risposta al gradino ha un andamento oscillatorio. Chiaramente l'istante in cui la risposta al gradino raggiunge il suo massimo è $t_{\max} = t_1 = \pi$ sec. Per valutare la sovraelongazione è necessario valutare il punto di massimo della risposta a gradino che certamente sarà $y_f(\pi)$. Si trova

$$y_f(\pi) = \frac{4}{5} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{2}} \right),$$

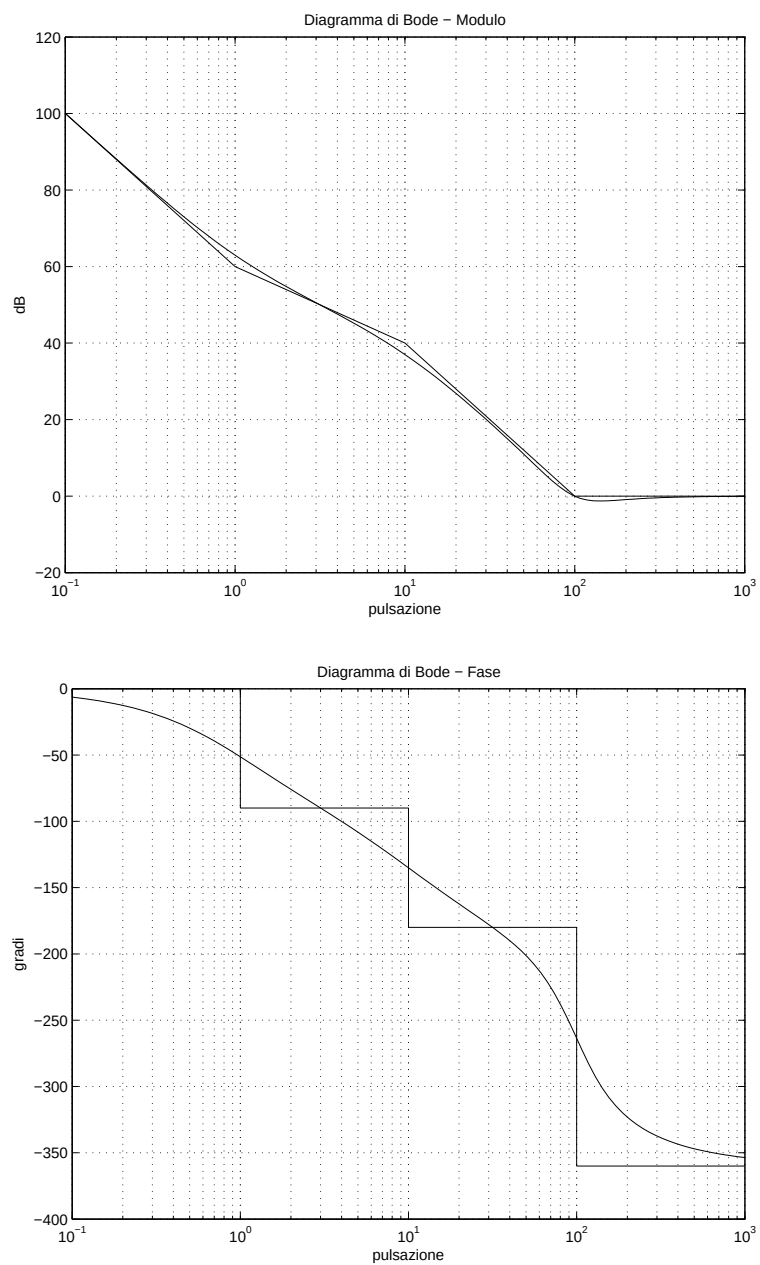
da cui segue che $s = \frac{y_f(\pi) - \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} \cdot 100\% = e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot 100\% = 20.79\%$. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



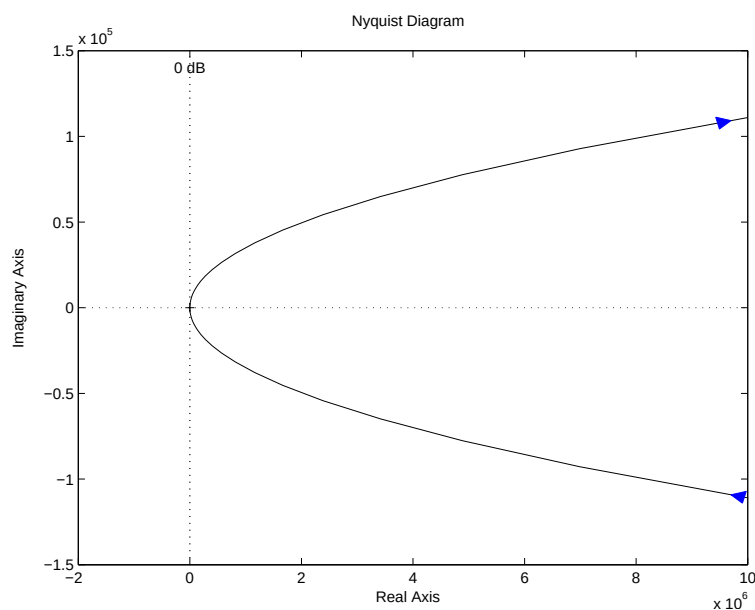
Esercizio 2. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s^2-100s+10^4)}{s^2(s+10)} = (-10^3) \frac{(1-s) \left(1 - 2\frac{1}{2}\frac{s}{100} + \frac{s^2}{100^2}\right)}{s^2(1+0.1s)}.$$

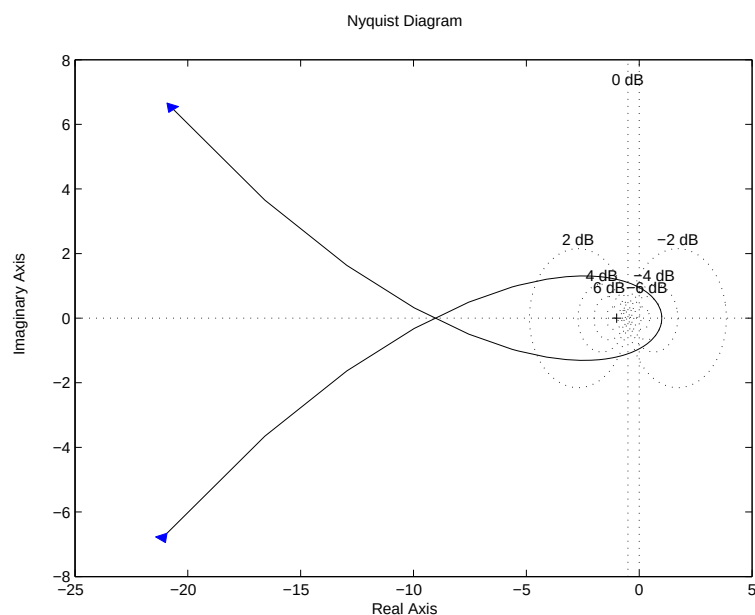
Pertanto $K_B = -10^3$ e la risposta in frequenza presenta un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), uno zero reale positivo in 1 ($1/T' = -1$ e $\mu' = 1$), un polo reale negativo in -10 ($1/T = 10$ e $\mu = 1$) ed una coppia di zeri complessi coniugati con $\omega'_n = 100$ e $\xi' = -0.5$ (e $|\xi'| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due zeri complessi coniugati hanno smorzamento negativo, ovvero parte reale positiva, e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Si noti che il diagramma arriva, per $\omega \rightarrow +\infty$, con fase di -360° , tuttavia per motivi puramente numerici questo fatto non è ben visibile dal diagramma precedente. Riportiamo, pertanto, di seguito il dettaglio del diagramma in prossimità dell'origine.



Una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito (tracciando un angolo giro in verso orario dal punto di pulsazione $\omega = -\varepsilon$ al punto di pulsazione $\omega = \varepsilon$), per valutare quanti giri il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ è necessario stimare se il punto di attraversamento del semiasse reale negativo da parte del diagramma di Nyquist si trovi a sinistra o a destra del punto $-1 + j0$. Dalla valutazione del diagramma di Bode si vede che quando la fase assume il valore -180° il modulo si trova molto al di sopra del valore 0 dB. Pertanto l'attraversamento del semiasse reale negativo avviene alla sinistra del punto

critico. Chiudendo il diagramma al finito (da $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ in senso orario) si trova che esso compie, quindi, 3 giri in verso orario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = -3$. Poiché $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$, la condizione $N = -3$ assicura $n_{W+} = 3$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta tre poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4 punti] Il sistema ottenuto per retroazione unitaria dalla sola $G(s)$ è di tipo 0. Pertanto per renderlo di tipo 1 è necessario introdurre un polo in 0, il che significa che K_i deve essere diverso da zero. L'errore di regime permanente in questo caso assume l'espressione

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore è 1, mentre $K_B(C)$ è il guadagno di Bode del controllore, parametro da fissare. Il controllore PI può essere riscritto nella forma

$$C_{PI}(s) = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i}s}{s},$$

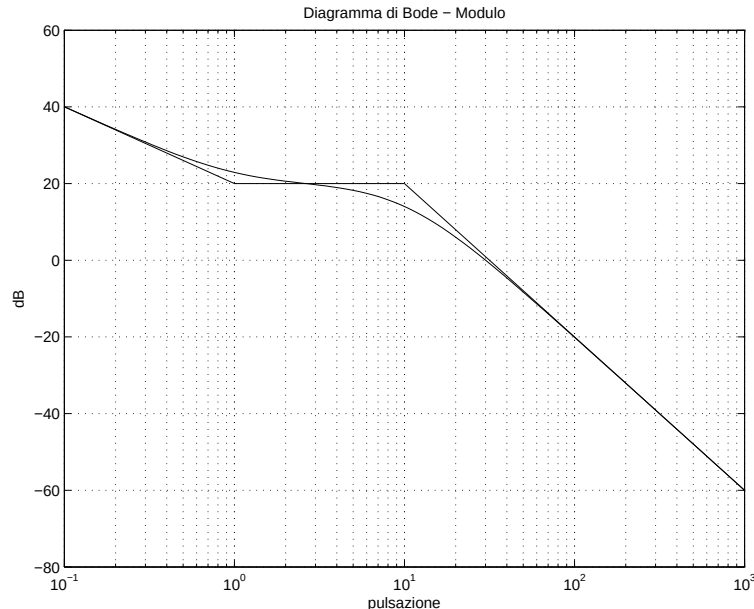
e, pertanto, K_i rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente al più 10^{-1} , è sufficiente imporre

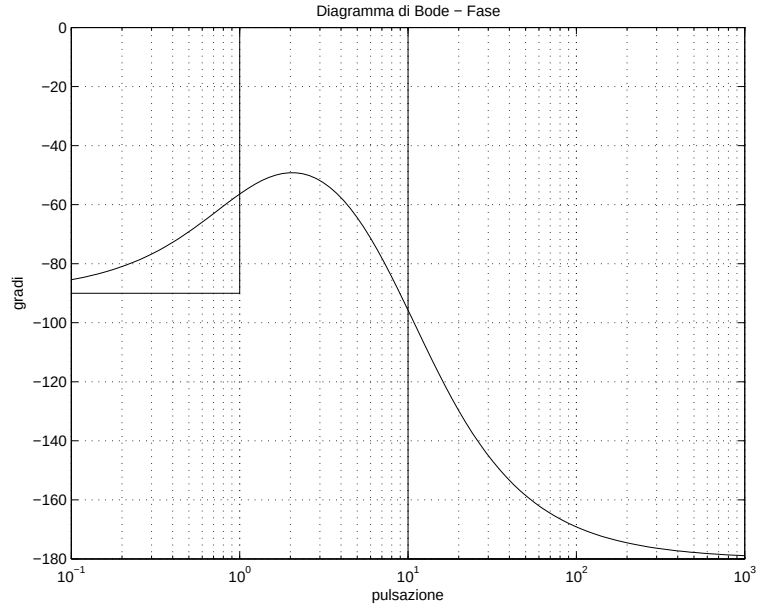
$$e_{rp} = \frac{1}{K_i} \leq 10^{-1},$$

ovvero

$$K_i \geq 10.$$

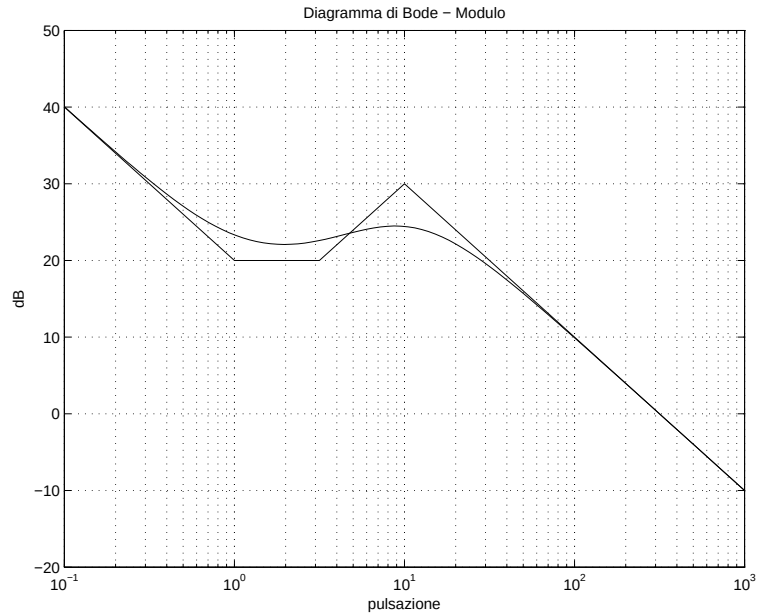
Scegliamo, preliminarmente, $K_i = 10$ e tracciamo il diagramma di Bode di $K_p G(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.

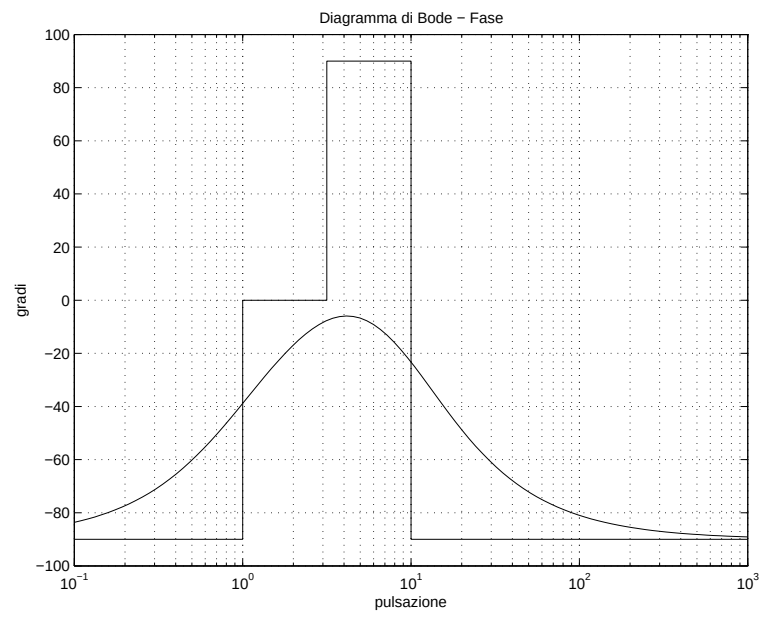




La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 10^{3/2}$ rad/s mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata ω_A^* è inferiore a 90° . Se inseriamo uno zero in $-10^{1/2}$, ovvero poniamo $\frac{K_p}{K_i} = 10^{-1/2}$, otteniamo il risultato desiderato sia dal punto di vista della pulsazione di attraversamento che dal punto di vista del margine di fase. Pertanto il controllore PD desiderato è

$$C_{PI}(s) = 10 \frac{1 + 10^{-1/2}s}{s} = 10^{1/2} + \frac{10}{s}.$$





Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 181 e successive.