COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI - 7 CFU e 9 CFU
16 Febbraio 2010

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (-a^2 + a + 1)\frac{dy(t)}{dt} + (a - a^2)y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt},$$

dove a è un parametro reale.

i) **[solo per corso da 7 CFU]** Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

ii) **[solo per corso da 7 CFU]** Per $a = 2$ si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Per $a = 0$ si determini, se esistono, la risposta transitoria e la risposta di regime permanente al segnale $u(t) = e^{jt}\delta_{-1}(t)$ a partire da condizioni iniziali tutte nulle. [Suggerimento: si determini l'intera evoluzione forzata del sistema, operando nel dominio delle trasformate. Si faccia attenzione alla presenza di coefficienti complessi]

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 10^3\ \frac{(s + 0.1)^2}{s^2(s^2 + s + 100)}.$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

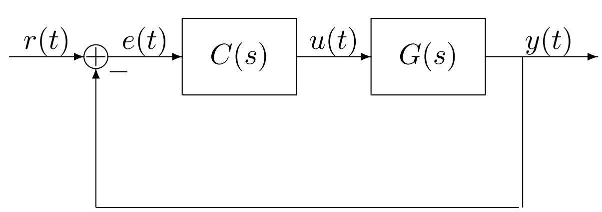
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\frac{s + 1}{s^2 + s + 100}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore (razionale e proprio) $C(s)$ in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda alla rampa unitaria in ingresso con errore di regime permanente pari a $e^*_{rp} = 10^{-1}$, b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega^*_A = 10^{5/2}$ rad/sec e c) il margine di fase (del sistema in catena aperta) sia non inferiore a 90^0.

Esercizio 4 [solo per corso da 9 CFU] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$ay(t) + \left(1 + \frac{a}{2}\right) y(t-1) + \frac{1}{2} y(t-2) = u(t-1) + u(t-2).$$

i) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema. [Suggerimento: si cerchi ad occhio una fattorizzazione del polinomio dell'equazione caratteristica].

ii) Per $a = -2$ si determini, operando nel dominio delle trasformate, la risposta impulsiva del sistema.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + (-a^2 + a + 1)s + (a - a^2) = 0.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & -a^2 + a + 1 \\
2 & 2 & a - a^2 \\
1 & \dfrac{-a^2 + a + 2}{2} & 0 \\
0 & a - a^2 & 0
\end{array}$$

Se imponiamo che tutti gli elementi in prima colonna abbiano ugual segno (positivo, come imposto dai primi due elementi), troviamo che $d(s)$ è polinomio di Hurwitz se e solo se

$$\begin{cases} -a^2 + a + 2 > 0 \\ a - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(a-2)(a+1) > 0 \\ a(1-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 2 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

ovvero per $0 < a < 1$. Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, si ha certamente stabilità asintotica per $0 < a < 1$. Valutiamo, ora, se esistono valori del parametro a per cui il sistema sia BIBO senza essere asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - s}{s^3 + 2s^2 + (-a^2 + a + 1)s + (a - a^2)} = \frac{s(s-1)}{s^3 + 2s^2 + (-a^2 + a + 1)s + (a - a^2)}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo uno zero in 0 ed uno in 1, entrambi "instabili". Pertanto può aver luogo una cancellazione se e solo se il polinomio $d(s)$ si annulla in 0 oppure in 1. $d(s)$ si annulla in 0 se e solo se

$$d(0) = a - a^2 = a\,(1 - a) = 0,$$

ovvero per $a = 0$ oppure per $a = 1$. $d(s)$ si annulla in 1 se e solo se

$$d(1) = 1 + 2 - a^2 + a + 1 + a - a^2 = -2(a^2 - a - 2) = -2(a-2)(a+1) = 0,$$

ovvero per $a = -1$ oppure per $a = 2$.

Per $a = 0$ o $a = 1$ si trova

$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2},$$

e pertanto il sistema è BIBO stabile. Per $a = -1$ oppure per $a = 2$ si trova

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)},$$

e pertanto il sistema è BIBO stabile. Di conseguenza il sistema è BIBO stabile per $a \in [0,1] \cup \{-1, 2\}$.

ii) [2 punti] Per $a = 2$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

e pertanto la risposta impulsiva del sistema è

$$w(t) = [-e^{-t} + 2e^{-2t}]\delta_{-1}(t).$$

iii) [4 punti per il corso da 7 CFU, 5 per il corso da 9 CFU (in quanto richiede studio stabilità per $a = 0$)] Per $a = 0$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - \frac{du(t)}{dt}$$

e la sua funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}.$$

Come visto ai punti precedenti il sistema è BIBO stabile ma non asintoticamente stabile. Di conseguenza la risposta di regime permanente al segnale dato esiste solo per le condizioni iniziali a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero. Il caso di condizioni iniziali tutte nulle certamente rientra tra questi. Per valutare la risposta transitoria e la risposta di regime permanente, calcoliamo l'evoluzione forzata d'uscita attraverso le trasformate di Laplace. Si trova

$$U(s) = \frac{1}{s-j},$$

e quindi

$$Y(s) = Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}\frac{1}{s-j} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s-j},$$

dove i parametri A, B e C possono essere calcolati con i limiti, ovvero:

$$\begin{aligned}
B &= \lim_{s\to-1}(s+1)^2 Y(s) = \lim_{s\to-1}\frac{s-1}{s-j} = \frac{-2}{-1-j} = 1-j \\
C &= \lim_{s\to j}(s-j)Y(s) = \lim_{s\to j}\frac{s-1}{(s+1)^2} = \frac{-1+j}{(1+j)^2} = \frac{1+j}{2} \\
A &= \lim_{s\to-1}(s+1)\left[Y(s) - \frac{1-j}{(s+1)^2}\right] = \lim_{s\to-1}\frac{j}{s-j} = \frac{j}{-1-j} = \frac{-1-j}{2}.
\end{aligned}$$

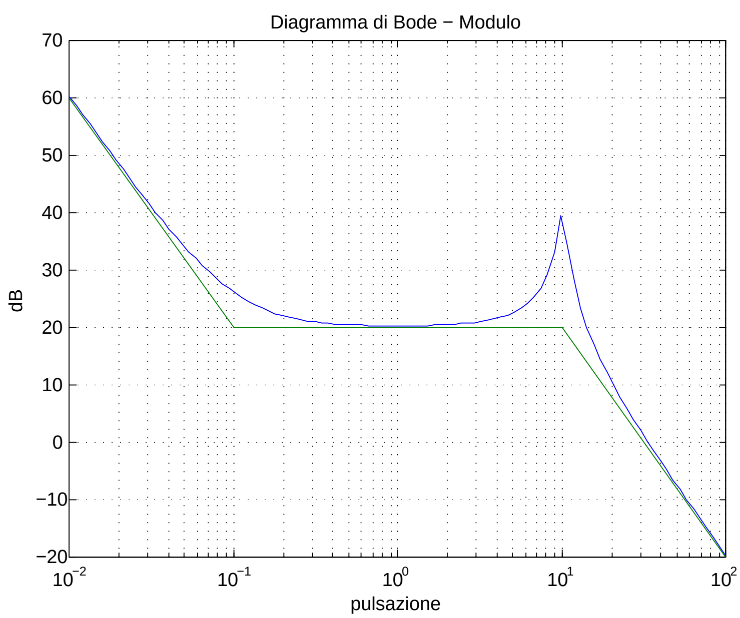
Di conseguenza

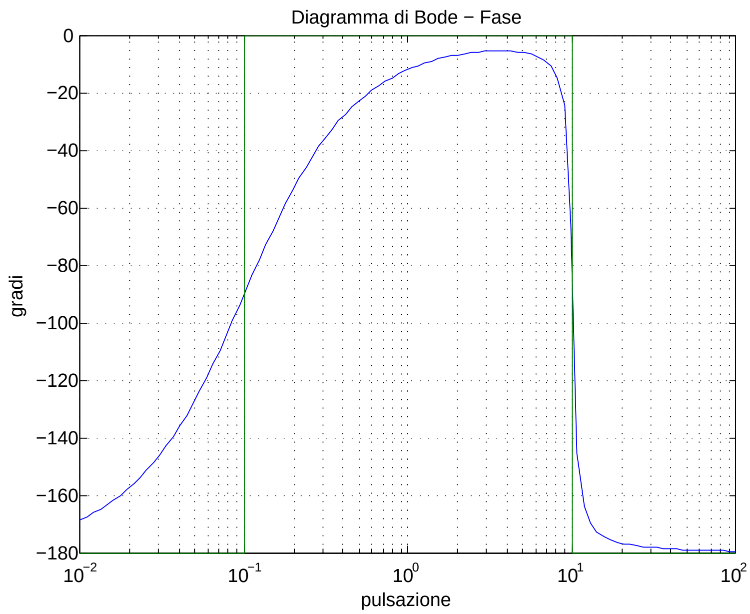
$$
\begin{aligned}
y_{tr}(t) &= Ae^{-t} + Bte^{-t} = \left(\frac{-1-j}{2} + (1-j)t\right)e^{-t} \\
y_{rp}(t) &= Ce^{jt} = \frac{1+j}{2}e^{jt}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

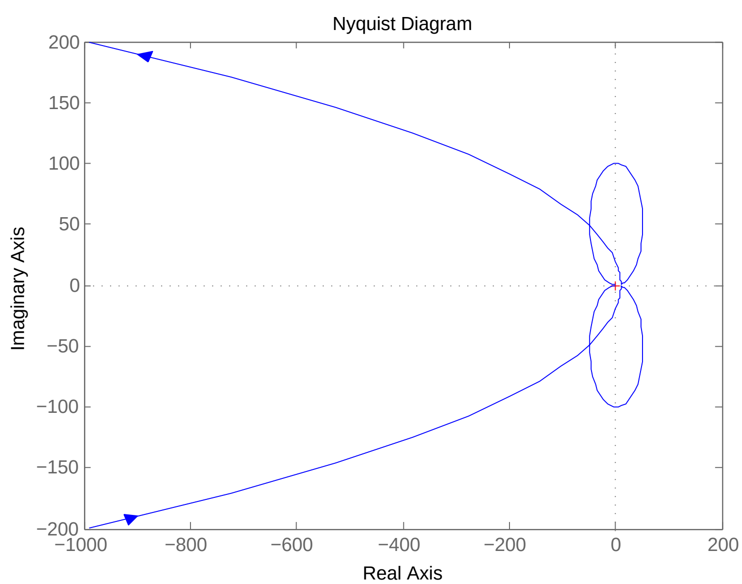
$$
G(s) = 10^3 \, \frac{(s+0.1)^2}{s^2(s^2+s+100)} = 10^{-1} \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)^2}{s^2\left(1+2\frac{1}{20}\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.
$$

Pertanto $K_B = 10^{-1}$ e la risposta in frequenza presenta un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$), uno zero reale negativo con $1/T' = -10^{-1}$ e $\mu' = 2$ e una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = 1/20$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

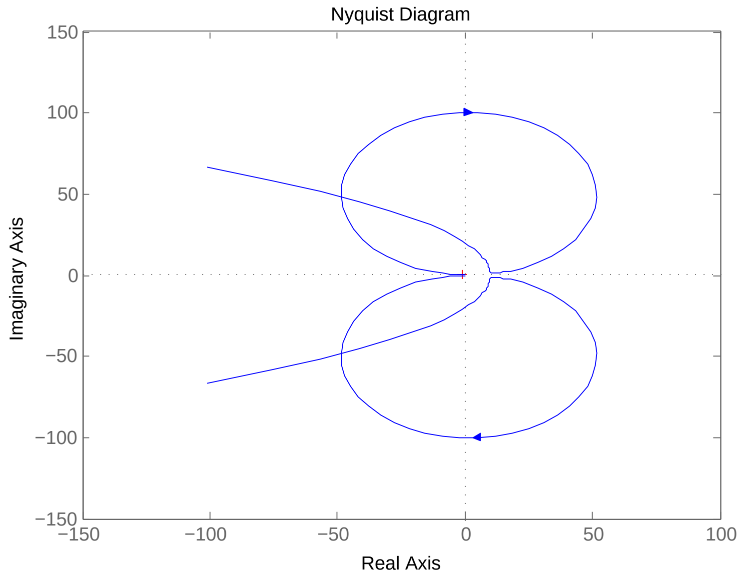




ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Il dettaglio del diagramma in un intorno dell'origine è riportato nel seguente grafico.



La chiusura del diagramma al finito avviene congiungendo il ramo superiore aperto con quello inferiore, nel semipiano reale negativo, in verso orario. Di conseguenza, il diagramma di Nyquist non compie nessun giro attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 0$. Poichè $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$, la condizione $N = 0$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

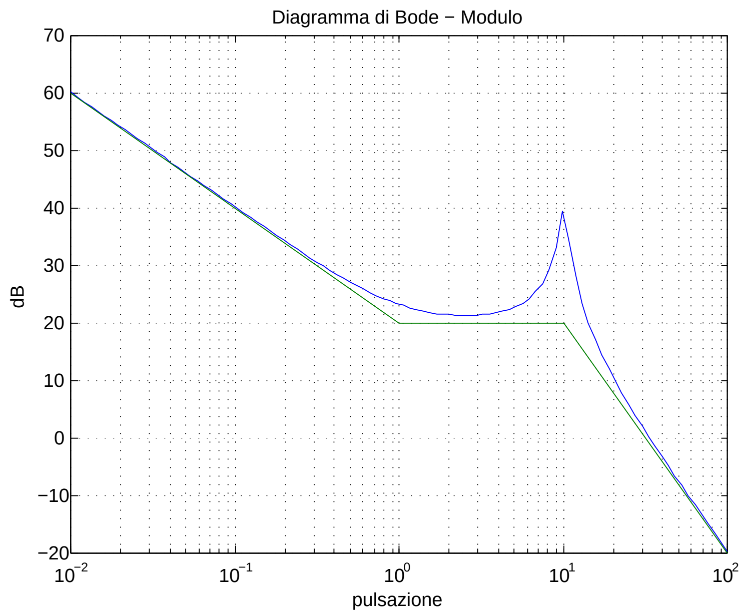
Esercizio 3. [5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

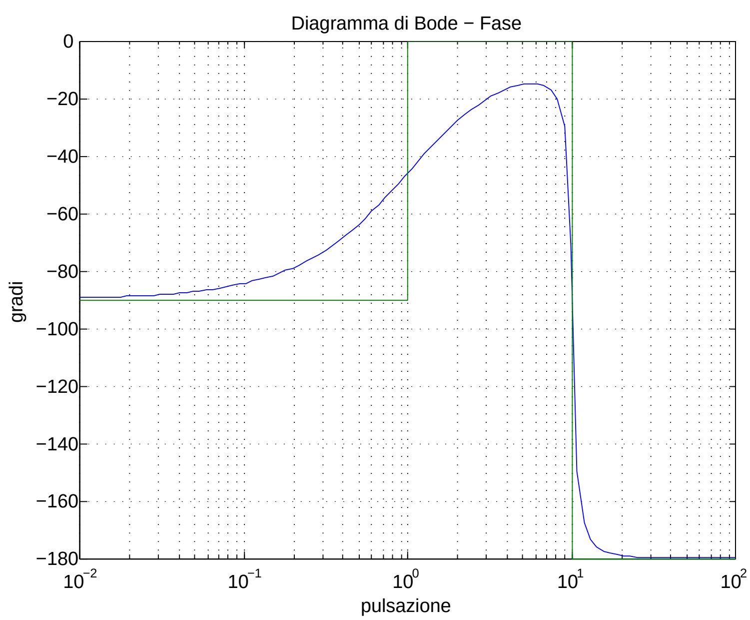
$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C)} = \frac{1}{10^{-1}K_B(C)} = 0.1,$$

da cui segue $K_B(C) = 100$. Prendiamo, allora, $C'(s) = \frac{100}{s}$. I diagrammi di Bode di

$$G(s) = C'(s)G(s) = 10\frac{1+s}{s\left(1 + 2\frac{1}{20}\frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}\right)}$$

sono i seguenti:

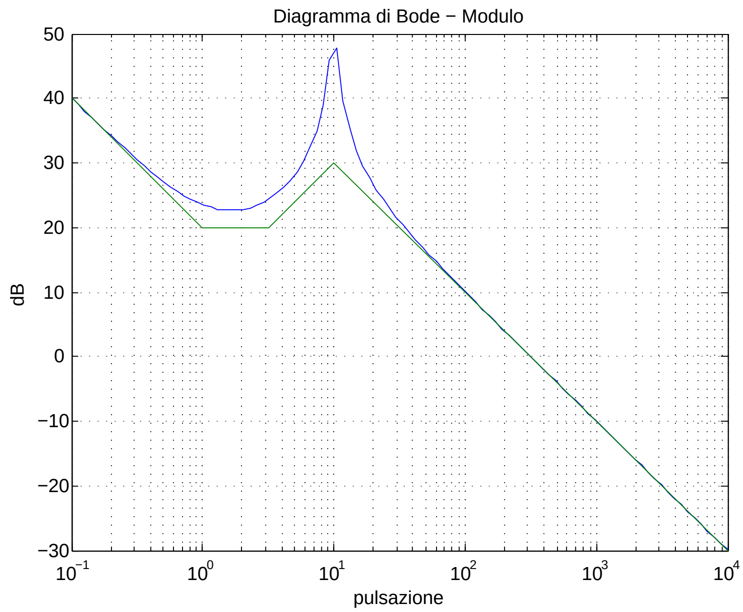


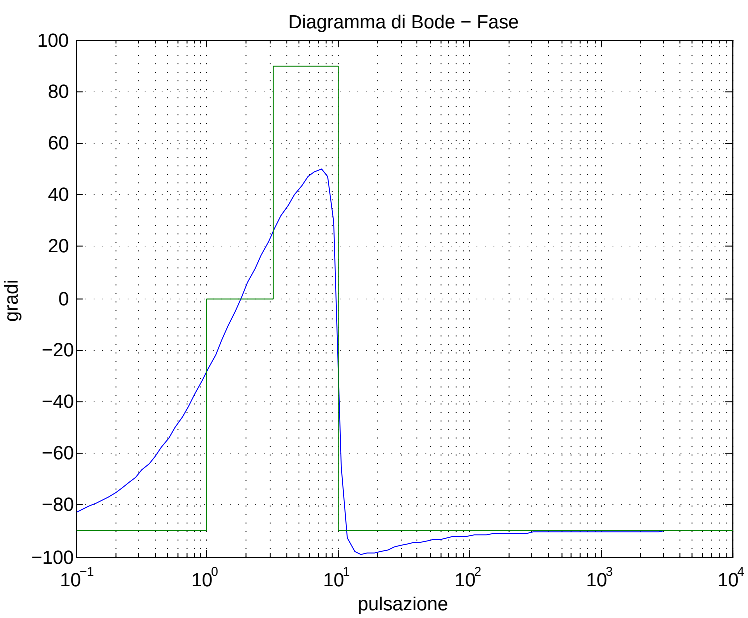


Si trova $10^{3/2}$ rad/s $\approx \omega_A < \omega_A^* = 10^{5/2}$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $0° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 90°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 10^{5/2}$ rad/s e di sollevare la fase di almeno 90°. A tal fine si può inserire, ad occhio, uno zero in posizione $-10^{1/2}$, al fine di soddisfare le specifiche e un polo a pulsazione molto alta per rendere la rete anticipatrice propria. Si trova, quindi, che la rete anticipatrice

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + \frac{s}{10^{1/2}}}{1 + \frac{s}{10^5}}$$

porta all'effetto desiderato.





Esercizio 4. i) [4 punti] Per $a = 0$ il sistema è ancora proprio e viene descritto dall'equazione alle differenze

$$y(t-1) + \frac{1}{2}y(t-2) = u(t-1) + u(t-2),$$

equivalente ai fini della stabilità a

$$y(t) + \frac{1}{2}y(t-1) = u(t) + u(t-1).$$

La sua equazione caratteristica in z^{-1} è

$$1 + \frac{1}{2}z^{-1} = 0$$

ed in z è

$$z + \frac{1}{2} = 0.$$

Pertanto per $a = 0$ c'è stabilità asintotica (e quindi, a maggior ragione, BIBO).

Per $a \neq 0$, l'equazione caratteristica in z^{-1} è

$$a + \left(1 + \frac{a}{2}\right) z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} = 0,$$

mentre l'equazione caratteristica in z è

$$az^2 + \left(1 + \frac{a}{2}\right) z + \frac{1}{2} = \left(z + \frac{1}{2}\right)(az + 1) = 0.$$

Tale equazione ha sempre una radice di modulo minore di uno, mentre la seconda radice, collocata in $-1/a$, ha modulo minore di 1 se e solo se $|a| > 1$. Quindi, per $a \neq 0$, il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $|a| > 1$.

Valutiamo, ora, nel caso $a \neq 0$, la stabilità BIBO. Certamente c'è stabilità BIBO per $|a| > 1$, ovvero $a \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Verifichiamo se esistono valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia l'asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{a + \left(1 + \frac{a}{2}\right) z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z + 1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(az + 1)}.$$

Chiaramente si può avere stabilità BIBO senza avere quella asintotica se e solo se esiste un valore del parametro a in corrispondenza a cui avviene una cancellazione tra il termine $z+1$ al numeratore e il denominatore. Ciò si verifica se e solo se $az+1 = z+1$, ovvero per $a = 1$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $a \in (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$ (oppure $a = 0$).

ii) [2.5 punti] Per $a = -2$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{z + 1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(-2z + 1)} = -\frac{1}{2}\frac{z + 1}{\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}.$$

Dalla sua decomposizione in fratti semplici:

$$W(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{z + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\frac{1}{z - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}z^{-1}\frac{z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}z^{-1}\frac{z}{z - \frac{1}{2}},$$

segue subito l'antitrasformata

$$w(t) = \left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]\delta_{-1}(t-1)$$

che rappresenta la risposta impulsiva del sistema.

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 181 e successive.