COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI - 7 CFU e 9 CFU
2 Febbraio 2010

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$a\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - a^2y(t) = 2\frac{du(t)}{dt} - 2au(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) **[solo per corso da 7 CFU]** Si studi la stabilità asintotica del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$, e per i valori di a per cui non c'è stabilità asintotica si determini il numero di radici a parte reale positiva dell'equazione caratteristica.

ii) **[solo per corso da 7 CFU]** Si studi la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

iii) Per $a = 1$ si determini, se esistono, le condizioni inziali $y(0^-)$, $\frac{dy(0^-)}{dt}$ e $\frac{d^2y(0^-)}{dt^2}$ in corrispondenza a cui esiste la risposta di regime permanente al segnale $u(t) = \cos(t)\delta_{-1}(t)$ e per tali condizioni si determini l'espressione esplicita di $y_{rp}(t)$. [Suggerimento: La descrizione delle condizioni iniziali può essere ottenuta - ad esempio - in forma parametrica, in termini dei coefficienti c_i coinvolti nell'espressione generica dell'evoluzione libera del sistema]

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = 10\ \frac{(1+s^2)(s+10)}{(s+10^{-1/2})(s^2-2s+100)}.$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. i) Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+6}{s^2+9s-2},$$

si determini, se possibile, un'azione di controllo puramente proporzionale, $C(s) = K$, in modo che il risultante sistema retroazionato abbia risposta al gradino

$$w_{-1}(t) = \left[\frac{12}{10} - \frac{10}{9}e^{-t} - \frac{8}{90}e^{-10t}\right]\delta_{-1}(t).$$

[Suggerimento: si associ alla risposta al gradino la funzione di trasferimento del sistema retroazionato che si vuole ottenere]

ii) Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\ \frac{s+1}{s(s+10)^2},$$

si progetti, se possibile, un controllore PD

$$C_{PD}(s) = K_p + K_d s \in \mathbb{R}[s]$$

in modo tale che a) il risultante sistema retroazionato risponda alla rampa unitaria in ingresso con errore di regime permanente non superiore a $e^*_{rp} = 0.1$ e b) la pulsazione di attraversamento del sistema in catena aperta sia all'incirca $\omega^*_A = 1000$ rad/sec.

Esercizio 4 [solo per corso da 9 CFU] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{5}{2}y(t-1) + y(t-2) = u(t-1) + \frac{1}{2}u(t-2).$$

i) Si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema;

ii) si determini l'espressione di un ingresso a cui corrisponde un'uscita forzata limitata. [Suggerimento: si ragioni in termini di trasformate zeta e relativi poli].

Teoria. Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) si derivi in dettaglio, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'espressione dell'uscita del sistema in corrispondenza alla generica famiglia di condizioni iniziali $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$ e al generico segnale di ingresso $u(t), t \in \mathbb{R}_+$, causale e dotato di trasformata di Laplace e si dimostri che la funzione di trasferimento del sistema è la trasformata di Laplace della risposta impulsiva.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è
$$0 = as^3 + s^2 - s - a^2.$$
Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz trattiamo prima il caso $a = 0$ a parte. Per tale valore $d(s) = s^2 - s = s(s-1)$ non è di Hurwitz ed ha un solo zero reale positivo. Pertanto il sistema non è asintoticamente stabile (si noti che per $a = 0$ comunque il sistema rimane proprio e la nostra analisi ha senso). Per $a \neq 0$ utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a^2 \\ 1 & a^3 - 1 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \end{array}$$

Poichè non esiste nessuna scelta del parametro a per cui tutti i coefficienti nella prima colonna della tabella di Routh abbiano ugual segno (positivo), ne consegue che $d(s)$ non è mai di Hurwitz e quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile. Per quanto concerne il numero di zeri a parte reale positiva positiva, al variare di a in $\mathbb{R}$, distinguiamo i seguenti casi (per i quali la tabella di Routh arriva a compimento):

- $a > 0$ e $a > 1$, ovvero $a > 1$: in questo caso i primi tre termini della prima colonna sono positivi e il quarto negativo, pertanto c'è una sola variazione di segno e quindi una sola radice reale positiva;
- $0 < a < 1$: in questo caso i primi due termini della prima colonna sono positivi e gli ultimi due negativi, pertanto anche in questo caso c'è una sola variazione di segno e quindi una sola radice reale positiva;
- $a < 0$: in questo caso solo il secondo termine in prima colonna è positivo e tutti gli altri sono negativi. Dunque ci sono due variazioni di segno e pertanto due radici a parte reale positiva.

Gli unici casi che non possono essere analizzati con la tabella sono $a = 0$ e $a = 1$. Il primo lo abbiamo già trattato. Consideriamo, quindi, il secondo. Per $a = 1$ il polinomio $d(s)$ diventa $d(s) = s^3 + s^2 - s - 1 = s^2(s+1) - (s+1) = (s+1)(s^2-1) = (s+1)^2(s-1)$. Di conseguenza presenta una sola radice reale positiva.

ii) [2 punti] Per quanto concerne la stabilità BIBO, non essendoci stabilità asintotica per nessun valore di a, certamente il sistema potrà al più essere BIBO senza essere asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è
$$W(s) = \frac{2(s-a)}{as^3 + s^2 - s - a^2}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo un solo zero in a. Pertanto può aver luogo una cancellazione se e solo se il polinomio $d(s)$ si annulla in a. Ciò si verifica se e solo se

$$d(a) = a^4 + a^2 - a - a^2 = a\left(a^3 - 1\right) = 0,$$

ovvero per $a = 0$ oppure per $a = 1$.

Per $a = 0$ si trova

$$W(s) = \frac{2s}{s^2 - s} = \frac{2}{s-1},$$

e pertanto il sistema non è BIBO stabile. Per $a = 1$ si trova

$$W(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{2}{(s+1)^2},$$

e pertanto il sistema è BIBO stabile. Di conseguenza il sistema è BIBO stabile unicamente per $a = 1$.

iii) [4 punti per il corso da 7 CFU, 5 per il corso da 9 CFU (in quanto richiede studio stabilità per $a = 1$)] Per $a = 1$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y = 2\frac{du(t)}{dt} - 2u(t)$$

e la sua funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{2(s-1)}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Come visto ai punti precedenti il sistema è BIBO stabile ma non asintoticamente stabile. Di conseguenza la risposta di regime permanente al segnale dato esiste solo per le condizioni iniziali a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero. Poiché $d(s) = (s+1)^2(s-1)$, i modi del sistema sono e^{-t}, te^{-t} ed e^t, e quindi le evoluzioni libere convergenti sono tutte e sole quelle in cui il modo e^t non compare ovvero quelle del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t}.$$

Le condizioni iniziali che corrispondono a questo tipo di evoluzioni si determinano in forma parametrica, valutando in $t = 0^-$ la funzione $y_\ell(t)$ e le sue derivate prima e seconda. Poiché

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell(t)}{dt} &= (c_2 - c_1)e^{-t} - c_2 te^{-t}, \\ \frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2} &= (-2c_2 + c_1)e^{-t} + c_2 te^{-t} \end{aligned}$$

ne consegue che le condizioni iniziali cercate possono essere descritte come segue

$$y(0^-) = c_1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = c_2 - c_1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -2c_2 + c_1,$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$. Per tali valori delle condizioni iniziali esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato ed essa è esprimibile nella forma

$$y_{rp}(t) = |W(j)| \cos(t + \arg W(j)).$$

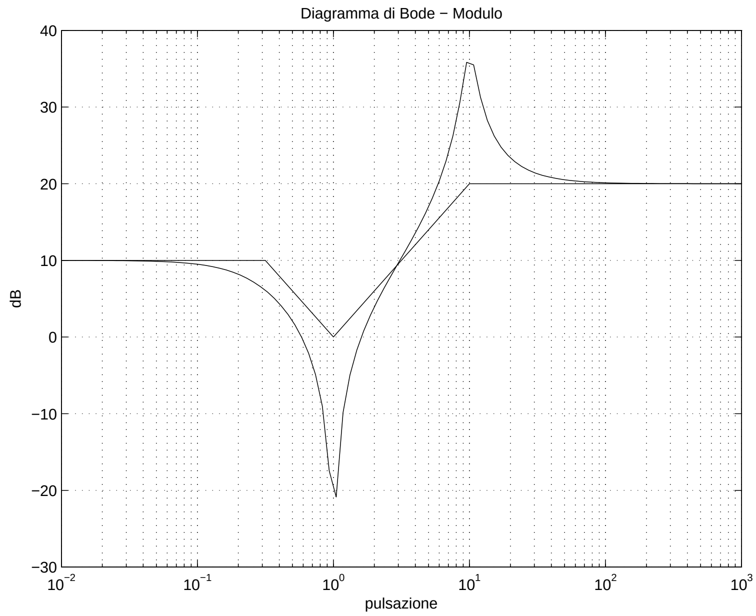
Si trova $W(j) = \frac{2}{(j+1)^2} = -j$, da cui $|W(j)| = 1$ e $\arg W(j) = -\frac{\pi}{2}$. Di conseguenza

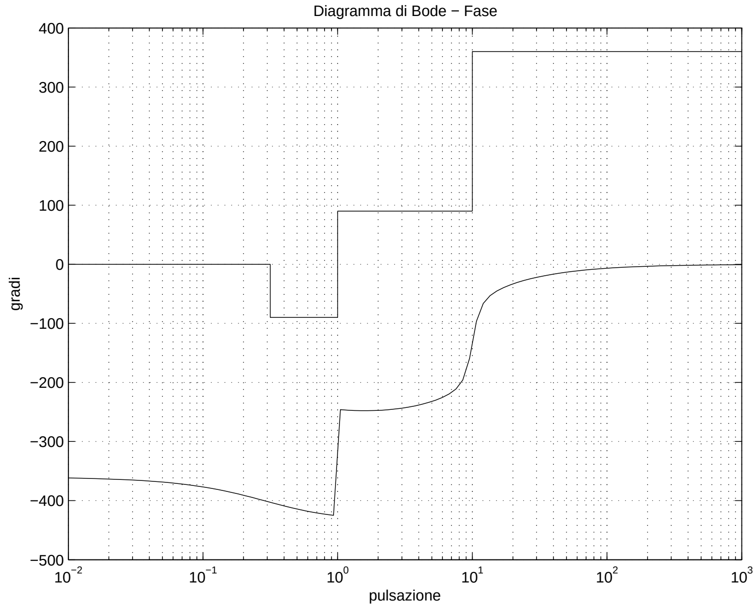
$$y_{rp}(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t.$$

Esercizio 2. i) [4.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = 10\,\frac{(1+s^2)(s+10)}{(s+10^{-1/2})(s^2-2s+100)} = 10^{1/2}\frac{(1+s^2)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{\left(1+\frac{s}{10^{-1/2}}\right)\left(1+2\frac{-1}{10}\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}$$

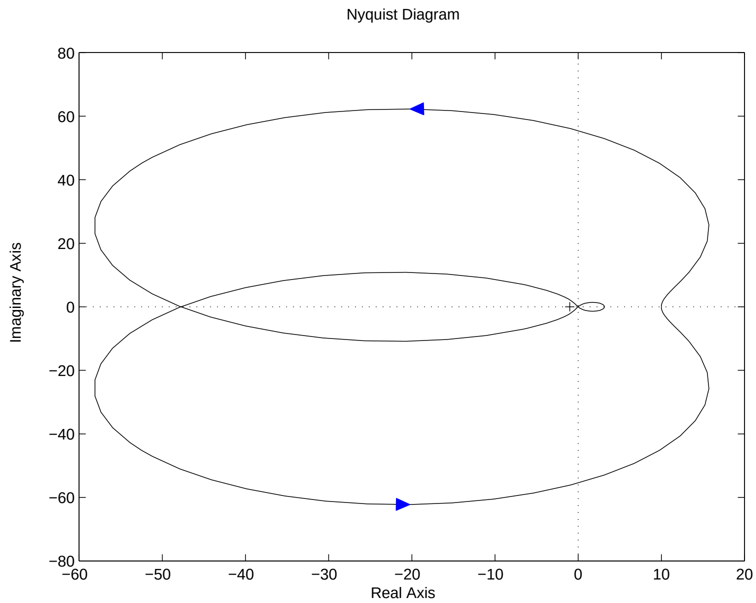
Pertanto $K_B = 10^{1/2}$ e la risposta in frequenza presenta una coppia di zeri immaginari puri coniugati in $\pm j$ ($\omega_n' = 1$, $\xi' = 0$), un polo reale negativo con $1/T = -10^{-1/2}$ e $\mu = 1$, uno zero reale negativo con $1/T' = -10$ e $\mu' = 1$ e una coppia di poli complessi coniugati (instabili) con $\omega_n = 10$ e $\xi = -1/10$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





Si noti che il primo picco del diagramma delle ampiezze in realtà è illimitato verso il basso, anche se per motivi numerici ciò non viene visualizzato.

ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Il diagramma risulta già chiuso in quanto $G(s)$ è priva di poli a parte reale nulla. Il diagramma di Nyquist compie due giri in verso antiorario attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 2$. Poichè $G(s)$ ha due poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 2$ assicura $n_{W+} = 0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [3 punti] Se il sistema ha risposta al gradino

$$w_{-1}(t) = \left[\frac{12}{10} - \frac{10}{9}e^{-t} - \frac{8}{90}e^{-10t}\right]\delta_{-1}(t),$$

ovvero, in termini di trasformate di Laplace

$$W_{-1}(s) = \frac{12}{10}\frac{1}{s} - \frac{10}{9}\frac{1}{s+1} - \frac{8}{90}\frac{1}{s+10} = \frac{2(s+6)}{s(s+1)(s+10)},$$

significa che esso ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{2(s+6)}{(s+1)(s+10)}.$$

Si tratta quindi di vedere se esiste un valore del parametro K in modo tale che

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K(s+6)}{s^2+9s-2+K(s+6)}$$

coincida con la precedente espressione. È immediato verificare che ciò si verifica per $K = 2$.

ii) [3 punti] Il sistema è di tipo 1 e non viene chiesto di modificarne il tipo. L'errore di regime permanente in questo caso assume l'espressione

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)},$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode del processo $G(s)$, il cui valore è 10^{-1}, mentre $K_B(C)$ è il guadagno di Bode del controllore, parametro da fissare. Il controllore PD può essere riscritto nella forma

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{K_d}{K_p}s\right),$$

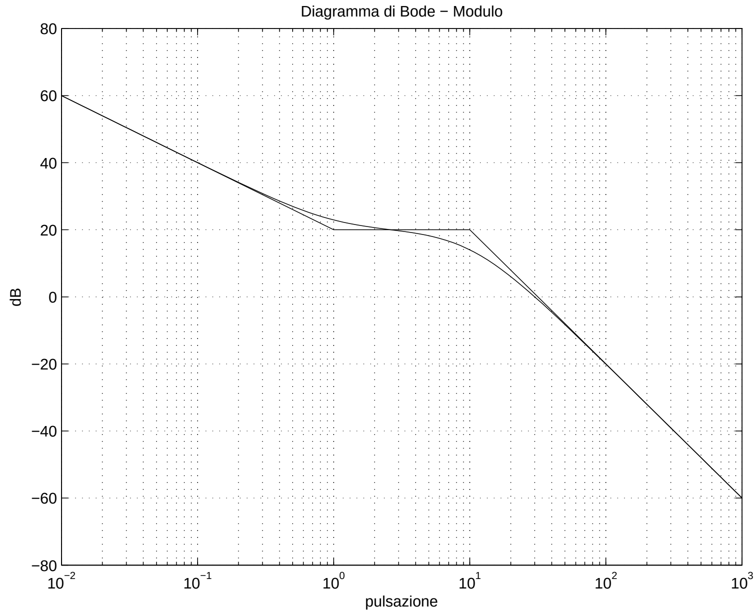
e, pertanto, K_p rappresenta il guadagno di Bode del controllore. Pertanto, se vogliamo che il sistema retroazionato (sia di tipo 1 e) abbia errore di regime permanente al più 10^{-1}, è sufficiente imporre

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{10^{-1}K_p} \le 0.1,$$

ovvero

$$K_p \ge 100.$$

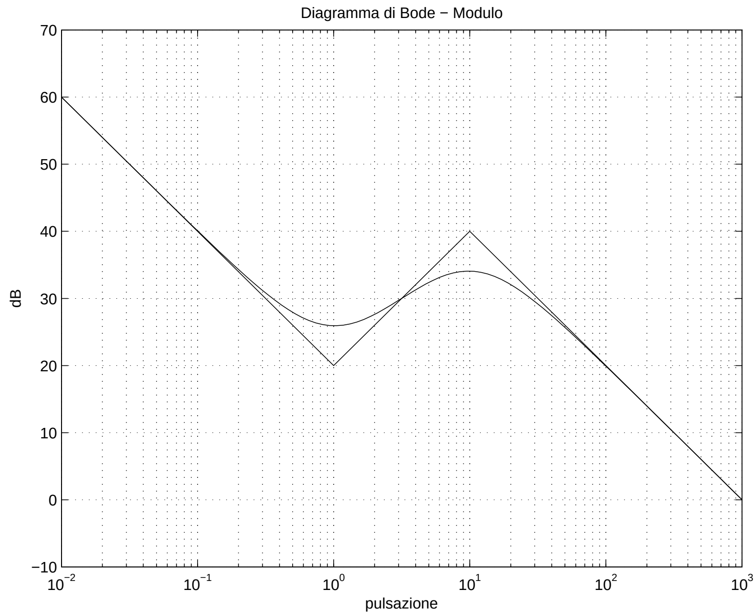
Scegliamo, preliminarmente, $K_p = 10^2$ e tracciamo il diagramma di Bode delle ampiezze di $K_pG(s)$, ottenendo il diagramma di Bode illustrato qui di seguito.



La pulsazione di attraversamento in questo caso è $\omega_A = 10^{3/2}$ rad/s, mentre la pulsazione desiderata è pari a $\omega_A^* = 1000$ rad/s. Se inseriamo uno zero in -1, ovvero poniamo $\frac{K_d}{K_p} = 1$, otteniamo il risultato desiderato. Pertanto il controllore PD desiderato è

$$C(s) = 100\,(1+s) = 100 + 100s.$$

Verifichiamo graficamente:



Esercizio 4. i) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-2)}.$$

Dalla sua decomposizione in fratti semplici:

$$W(z) = \frac{5}{3}\frac{1}{z-2} - \frac{2}{3}\frac{1}{z-\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}z^{-1}\cdot\frac{z}{z-2} - \frac{2}{3}z^{-1}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}},$$

segue subito l'antitrasformata

$$w(t) = \left[\frac{5}{3}2^{t-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]\delta_{-1}(t-1)$$

che rappresenta la risposta impulsiva del sistema.

ii) [3 punti] Dall'espressione della funzione di trasferimento del sistema possiamo dedurre che, al fine di determinare un'ingresso $u(t)$ a cui corrisponda un'uscita forzata limitata, è sufficiente scegliere $u(t)$ in modo che la sua trasformata zeta $U(z)$ cancelli il fattore instabile $z-2$, al denominatore di $W(z)$, e non introduca altri poli instabili. La scelta più semplice consiste nel porre

$$U(z) = \frac{z-2}{z} = 1 - 2z^{-1},$$

che corrisponde a

$$u(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1),$$

per il quale si ottiene

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= W(z)U(z) = \frac{z+\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}\frac{z-2}{z} = \frac{z+\frac{1}{2}}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ &= z^{-1}\frac{z-\frac{1}{2}+1}{z-\frac{1}{2}} = z^{-1} + z^{-2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ovvero

$$y_f(t) = \delta(t-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^{t-2}\delta_{-1}(t-2),$$

convergente e quindi limitata.

Teoria. [4 punti] Si veda il Capitolo 3, pag. 68 e seguenti, del Libro di testo.