

COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI
Laurea in Ingegneria dell'Informazione
13 Luglio 2010

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \ 1 \ 0] x(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- i) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico di guadagno L che attribuisca alla dinamica dell'errore di stima tutti e soli i modi e^{-t} ed e^{-2t} ;
- ii) con riferimento alla matrice $F + LH$ determinata al punto precedente, si determini l'espressione di $e(t)$, l'errore di stima al generico istante t , in funzione della generica condizione iniziale $e(0)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si determini per quali valori di a il sistema è osservabile e/o ricostruibile.

Si ponga $a = 0$ nel seguito dell'esercizio:

- ii) si progetti, se possibile, un regolatore asintotico in modo tale che la matrice del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) abbia tutti gli autovalori pari a $1/2$;
- iii) si determini la matrice di stato e la funzione di trasferimento del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) in corrispondenza al controllore ed allo stimatore determinati al punto ii).

Esercizio 3. Dato il sistema lineare discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1-a}{2} & a-1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \ 1 \ 2] x(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a è un parametro reale.

- i) Si determini, al variare di a in \mathbb{R} , la forma di Jordan della matrice F e se ne studi stabilità asintotica, semplice e BIBO.

Si ponga $a = \frac{1}{2}$ nel seguito dell'esercizio:

- ii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato in modo tale che la risposta impulsiva del sistema retroazionato sia a supporto finito (ovvero $W_K(t) = 0$ per $t > \ell$, per qualche $\ell \in \mathbb{Z}_+$);
- iii) si progetti, se possibile, un ingresso $u(t)$, nullo per $t \geq 2$, in modo tale che l'uscita soddisfi $y(t) = c \left(\frac{1}{2}\right)^t$ per ogni $t \geq 2$, per qualche $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 [NOTA: Chiaramente si sottintende $x(0) = 0$].

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

Teoria. Si dimostri che un generico modello di stato $\Sigma = (F, G, H)$ di dimensione n è osservabile se e solo se la corrispondente matrice PBH di osservabilità

$$\begin{bmatrix} sI_n - F \\ H \end{bmatrix}$$

ha rango n per ogni $s \in \mathbb{C}$, senza ricorrere alla dualità.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3.5 punti] È immediato verificare che il sistema si trova in forma standard di osservabilità, dal momento che la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [0 \quad 1] \right)$$

è osservabile, e la matrice F_{22} del sottosistema non osservabile è pari a $F_{22} = [-1]$. Pertanto è possibile allocare come polinomio caratteristico della matrice $F + LH$ tutti e soli i polinomi multipli di $\Delta_{F_{22}}(s) = s + 1$. Ora la richiesta sui modi di $F + LH$ corrisponde alla richiesta di attribuire come polinomio minimo di $F + LH$ il polinomio $\psi_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)$. Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, entrambi allocabili: $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)^2(s+2)$ e $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)^2$. Ora, se attribuisco alla matrice L la struttura parametrica $L = [a \quad b \quad c]^T$, la matrice $F + LH$ diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 1+c & -1 \end{bmatrix}$$

ed è immediato vedere che attribuendo a c il valore -1 la matrice diventa diagonale a blocchi, ovvero

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + L_1 H_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se allora attribuiamo alla matrice $F_{11} + L_1 H_1$ il polinomio caratteristico $(s+1)(s+2)$, per la struttura diagonale a blocchi di $F + LH$ saremo certi che la forma di Jordan di $F + LH$ sia

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi che la matrice abbia esattamente i modi desiderati. Imponiamo, quindi,

$$\Delta_{F_{11}+L_1 H_1}(s) = s^2 - (1+b)s - (2+a) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2,$$

ottenendo $a = b = -4$. Si ha, in tal modo, $L = [-4 \quad -4 \quad -1]^T$.

ii) [3 punti] La matrice $F + LH$ determinata al punto precedente è pari a

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la sua forma di Jordan è pari a

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò significa che la matrice T di cambio base sarà del tipo

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad v_3],$$

con v_1 autovettore relativo a -2 e v_2 e v_3 due autovettori linearmente indipendenti relativi a -1 . In realtà il conto può essere significativamente semplificato, tenendo conto del fatto che $F + LH$ è diagonale a blocchi e quindi come matrice T possiamo scegliere

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove w_1 e w_2 sono due autovettori in \mathbb{R}^2 di $F_{11} + L_1 H_1$ relativi, rispettivamente, a -2 e -1 . Si trova $w_1 = [1 \ 1]^\top$, $w_2 = [2 \ 1]^\top$, da cui

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$e^{Ft} = T e^{Jt} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$e(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} e(0) = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + 2(e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ (e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + (2e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ e^{-t}e_3(0) \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. i) [2 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -a \end{bmatrix}.$$

È facile quindi vedere che tale matrice ha rango 3 per ogni $a \neq 0$. Quindi per $a = 0$ non è osservabile, mentre per tutti gli altri valori di a lo è. Certamente se è osservabile è pure ricostruibile. Verichiamo ora se il sistema è ricostruibile per $a = 0$. Per tale valore del parametro a la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e non ha autovalori nulli, quindi certamente l'unico autovalore del sottosistema non osservabile non può essere nullo. Pertanto per $a = 0$ il sistema non è nemmeno ricostruibile.

ii) [4.5 punti] È facile verificare che per $a = 0$ la coppia (F, H) è in forma standard di osservabilità, giacché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right)$$

è osservabile, e la matrice del sottosistema non osservabile è pari a $F_{22} = [1/2]$. Esiste pertanto uno stimatore asintotico che attribuisce come polinomio caratteristico di $F + LH$ il polinomio $\Delta_{F+LH}(z) = (z - \frac{1}{2})^3$.

Posto $L = [L_1^\top \mid L_2^\top]^\top = [a \ b \ c]^\top$ si trova

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & -1 & 0 \\ 2+b & 0 & 0 \\ c+1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che $\Delta_{F_{11}+L_1 H_1}(z) = (z - \frac{1}{2})^2$ ovvero che

$$\Delta_{F_{11}+L_1 H_1}(z) = (z - 1 - a)z + (2 + b) = z^2 - (1 + a)z + (2 + b) = z^2 - z + \frac{1}{4},$$

si ottiene

$$L = [0 \ -\frac{7}{4} \ c]^\top,$$

con c parametro arbitrario in \mathbb{R} .

Per quanto riguarda la parte di controllo, è immediato verificare che la coppia (F, G) è raggiungibile e quindi certamente esiste un controllore K che attribuisce come polinomio caratteristico di $F + GK$ il polinomio $\Delta_{F+GK}(z) = (z - \frac{1}{2})^3$. Posto

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1 + a_2 & -1 + b_2 & c_2 \\ 2 + a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

la soluzione più semplice consiste nell'eguagliare la precedente matrice parametrica alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene in tal modo

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Ricordiamo che la matrice del sistema complessivo, nell'ipotesi di assumere come vettore di stato $[x(t)^\top \quad e(t)^\top]^\top$, è data da

$$F_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne la funzione di trasferimento, ci ricordiamo dalla teoria che essa coincide con quella del sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$. Si trova, pertanto,

$$W_{\text{tot}}(z) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z - 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & z - 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & z - 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad \frac{1}{z-1/2}].$$

Esercizio 3. i) [4 punti] La matrice F ha una struttura triangolare e i suoi autovalori sono $\sigma(F) = (1/2, 1, a - 1)$. Si noti che la presenza di un autovalore in 1 esclude automaticamente la possibilità che ci sia stabilità asintotica per qualsiasi valore del parametro a . Pertanto, nel seguito, ci occuperemo solo della stabilità semplice e di quella BIBO. Chiaramente si tratta di valutare per quali valori del parametro a la matrice F ha un autovalore doppio. Ciò si verifica se e solo se $a - 1 = 1$, ovvero $a = 2$, oppure $a - 1 = 1/2$, ovvero $a = 3/2$. Nel primo caso si trova

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che $\text{rango}(I_3 - F)$ è pari a 2 e quindi la molteplicità geometrica di 1 è pari a 1. Pertanto la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chiaramente tale matrice non è semplicemente stabile. Per $a = 3/2$ si trova

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Anche in questo caso $1/2$ ha molteplicità geometrica 1 e quindi la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è semplicemente stabile. Infine per $a \neq 3/2, 2$ i tre autovalori sono distinti e quindi la forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale matrice è semplicemente stabile se e solo se $|a-1| < 1$ oppure $a-1 = -1$. Ciò corrisponde alla condizione $a \in [0, 2)$.

Valutiamo ora la stabilità BIBO. La matrice di trasferimento del sistema è

$$W(z) = [0 \quad 1 \quad 2] \begin{bmatrix} z-1 & 0 & 0 \\ -\frac{1-a}{2} & z-a+1 & 0 \\ 0 & -1 & z-\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{z + \frac{3}{2}}{(z-a+1)(z-1/2)}.$$

Va osservato che a tale risultato si può pervenire in modo rapido osservando che la coppia (F, g) è di fatto una forma standard di raggiungibilità alla rovescia (ovvero con parte raggiungibile descritta dalla coppia (F_{22}, g_2)) per ogni valore di a . Ora certamente c'è BIBO stabilità se $|a-1| < 1$ ovvero $0 < a < 2$. Poiché l'unico zero presente al numeratore ha modulo maggiore di 1, si tratta ora di valutare se esiste un valore di a per cui ha luogo la semplificazione tra numeratore e denominatore. Ora la semplificazione ha luogo se e solo se $1-a = \frac{3}{2}$, ovvero $a = -\frac{1}{2}$, e in tal caso si trova

$$W(z) = \frac{1}{z-1/2}$$

che chiaramente è BIBO stabile. Quindi si ha BIBO stabilità se e solo se $a \in (0, 2) \cup \{-1/2\}$.

ii) [3.5 punti] Osserviamo in primo luogo, che la richiesta sulla risposta impulsiva del sistema retroazionato si traduce semplicemente nella richiesta che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato sia

$$W_k(z) = \frac{n(z)}{z^\ell}$$

per qualche $\ell \in \mathbb{Z}_+$ e $n(z) \in \mathbb{R}[z]$ non nullo, di grado minore di ℓ . In altre parole, dobbiamo allocare tutti i poli del sistema retroazionato in 0. Per $a = 1/2$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Come già osservato, la coppia (F, g) non è raggiungibile, ma è in forma standard di raggiungibilità. Poiché la funzione di trasferimento coincide con la funzione di trasferimento del solo sottosistema raggiungibile, una soluzione possibile è quella di attribuire alla matrice del sottosistema raggiungibile (in questo caso F_{22}) autovalori nulli. Posto

$$K = [K_1 \quad K_2] = [a \quad b \quad c]$$

si trova

$$F_{22} + g_2 K_2 = \begin{bmatrix} b - \frac{1}{2} & c \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è pari a $z^2 - bz + (\frac{1}{2}b - \frac{1}{4} - c)$. Imponendo che esso coincida con z^2 si trova $b = 0$ e $c = -\frac{1}{4}$. Quindi la soluzione generale al problema è

$$K = [a \quad 0 \quad -\frac{1}{4}]$$

con a parametro arbitrario.

iii) [2.5 punti] La soluzione consiste nel notare che se riusciamo a portare lo stato $x(2)$ in $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, tutta la dinamica successiva rimarrà in tale sottospazio, che altro non è che l'autospazio relativo all'autovalore $1/2$, e quindi in uscita dall'istante $t = 2$ in poi vedrò solo $y(t) = y_e(t) = 2x_3(t) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{t-2} x_3(2)$, dove $x_3(\cdot)$ è la terza componente del vettore di stato $x(2)$. Ora l'insieme degli stati raggiungibili in 2 passi è dato da

$$X_2^R = \text{Im} [g \quad Fg] = \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pertanto certamente $[0 \quad 0 \quad 1]^\top$ è raggiungibile in due passi. Posto

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x(2) = \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

si trova $u(0) = 1, u(1) = 1/2$ e, in corrispondenza, vale $y(t) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{t-2} = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^t, \forall t \geq 2$.

Teoria. [4.5 punti] La prova segue la falsa riga della dimostrazione del criterio PBH di raggiungibilità. La dimostrazione del fatto che l'osservabilità assicura che la matrice PBH non perda mai rango viene fatta per contro-nominale. Se la matrice PBH di osservabilità perde rango allora esiste un vettore non nullo nel suo nucleo e tale vettore appartiene anche a $\ker \mathcal{O}$, provando in tal modo che il sistema non è osservabile.

Viceversa se il sistema non è osservabile può essere messo in forma standard di osservazione ed è immediato verificare che in corrispondenza a tutti gli autovalori della matrice F_{22} del sottosistema non osservabile la matrice del criterio PBH di osservabilità perde rango.