

**COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI (IMC - 9 CFU)**  
**COMPITO DI ANALISI DEI SISTEMI (IMC/IG - 6 CFU)**

**13 Luglio 2010 - A.A. 2009/2010**

**Esercizio 1.** Si consideri il sistema a tempo discreto non lineare descritto dalla seguente equazione di stato:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) = (4x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2)x_1(t) - x_1(t)u(t), \\x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)) = (4x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2)x_2(t) - x_2(t)u(t), \quad t \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

i) Si determinino, per  $\bar{u} \geq -1$ , i punti di equilibrio del sistema in corrispondenza all'ingresso costante  $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbb{Z}$ ;

*[Suggerimento: in alcuni casi non occorre il calcolo esplicito dei punti di equilibrio e può essere utile cercare di darne una rappresentazione grafica sul piano  $(x_1, x_2)$ ];*

ii) [solo per IG e IMC 6CFU]

per  $\bar{u} = 0$ , si determini il modello linearizzato del sistema in corrispondenza a ciascuno dei punti di equilibrio (generici) e se ne discuta la stabilità;

iii) [solo per IMC 9CFU]

per  $\bar{u} = 0$  si discuta la stabilità asintotica del sistema nell'origine ricorrendo al Criterio di Lyapunov: si consideri a tale proposito la funzione  $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - \gamma)^2 + \beta(x_2 - \delta)^2$ , per opportuni valori dei parametri  $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  (da determinare).

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\y(t) &= Hx(t) = [0 \ 1 \ 0] x(t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

i) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico di guadagno  $L$  che attribuisca alla dinamica dell'errore di stima tutti e soli i modi  $e^{-t}$  ed  $e^{-2t}$ ;

ii) con riferimento alla matrice  $F+LH$  determinata al punto precedente, si determini l'espressione di  $e(t)$ , l'errore di stima al generico istante  $t$ , in funzione della generica condizione iniziale  $e(0)$ ;

iii) si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato che renda il sistema retroazionato BIBO stabile.

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\y(t) &= Hx(t) = [1 \ 0 \ 0] x(t), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- i) Si determini per quali valori di  $a$  il sistema è osservabile e/o ricostruibile.

Si ponga  $a = 0$  nel seguito dell'esercizio:

- ii) si progetti, se possibile, un regolatore asintotico in modo tale che la matrice del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) abbia tutti gli autovalori pari a  $1/2$ ;
- iii) si determini la matrice di stato e la funzione di trasferimento del sistema complessivo (sistema di partenza più regolatore) in corrispondenza al controllore ed allo stimatore determinati al punto ii).

NOTA: Le risposte precedenti vanno adeguatamente giustificate, con ciò intendendo che sia nel caso in cui il controllore/stimatore esista sia nel caso in cui non esista devono essere fornite le motivazioni teoriche per affermare l'esistenza o la non esistenza di tale controllore/stimatore.

**Teoria.** Dato un sistema  $\Sigma = (F, G, H)$  e il corrispondente sistema retroazionato  $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$ , si enunciino e si dimostrino le proposizioni sulla raggiungibilità/non raggiungibilità di  $\Sigma_K$  a partire dalle corrispondenti proprietà del sistema  $\Sigma$ .

## SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [3 punti] Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$  in corrispondenza all'ingresso costante  $\bar{u}$  sono

$$\begin{cases} x_{1e} &= (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2)x_{1e} - x_{1e}\bar{u}, \\ x_{2e} &= (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2)x_{2e} - x_{2e}\bar{u}, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} - 1)x_{1e} &= 0, \\ (4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} - 1)x_{2e} &= 0. \end{cases}$$

Distinguiamo due casi a seconda del valore di  $\bar{u}$ . Se  $\bar{u} = -1$ , allora si ha un unico punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ . Se invece  $\bar{u} > -1$ , in aggiunta al punto di equilibrio nell'origine  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$ , sono punti di equilibrio tutti i punti dell'ellisse descritta dall'equazione

$$4x_1^2 + 3x_2^2 = \bar{u} + 1,$$

ellisse sul piano  $(x_1, x_2)$ , centrata nell'origine e con semiassi pari rispettivamente a  $\sqrt{\frac{1+\bar{u}}{4}}$  e  $\sqrt{\frac{1+\bar{u}}{3}}$ .

ii) [4 punti] Le equazioni del sistema non lineare sono del tipo

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)), \end{cases}$$

e per  $u(t) = \bar{u} = 0$  tale sistema presenta come punti di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$  e il generico punto  $\mathbf{x}_e = (x_{1e}, x_{2e})$  che soddisfa all'equazione  $4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 = 1$ . Il sistema linearizzato in un intorno di un generico punto di equilibrio ad ingresso costante  $\bar{u}$  assume la forma

$$\delta x(t+1) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

per l'equazione di stato, dove

$$F = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}} = \left. \begin{bmatrix} 12x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - \bar{u} & 6x_{1e}x_{2e} \\ 8x_{1e}x_{2e} & 4x_{1e}^2 + 9x_{2e}^2 - \bar{u} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}};$$

$$G = \left. \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}} = \left. \begin{bmatrix} -x_{1e} \\ -x_{2e} \end{bmatrix} \right|_{\mathbf{x}_e, \bar{u}}.$$

Pertanto nel punto di equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$  per  $\bar{u} = 0$  abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mentre nel generico punto di equilibrio sull'elisse abbiamo

$$F = \begin{bmatrix} 8x_{1e}^2 + 1 & 6x_{1e}x_{2e} \\ 8x_{1e}x_{2e} & 6x_{2e}^2 + 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -x_{1e} \\ -x_{2e} \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda lo studio della stabilità si vede che l'origine è asintoticamente stabile (la matrice  $F$  presenta in questo caso due autovalori in zero), mentre il sistema linearizzato attorno al generico punto dell'elisse risulta instabile. Infatti in questo caso il polinomio caratteristico relativo alla matrice  $F$  risulta pari a:

$$\begin{aligned} \Delta_F(z) &= (z - 8x_{1e}^2 - 1)(z - 6x_{2e}^2 - 1) - 48x_{1e}x_{2e} \\ &= z^2 + z(-8x_{1e}^2 - 6x_{2e}^2 - 2) + (48x_{1e}x_{2e} + 8x_{1e}^2 + 6x_{2e}^2 + 1 - 48x_{1e}x_{2e}) \\ &= z^2 + z(-2(4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - 1) - 4) + (2(4x_{1e}^2 + 3x_{2e}^2 - 1) + 3) \\ &= z^2 - 4z + 3 \end{aligned}$$

che presenta due autovalori costanti e pari a 1 e 3 (e quest'ultimo autovalore indica instabilità).

iii) [3.5 punti] La funzione  $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - \gamma)^2 + \beta(x_2 - \delta)^2$  deve risultare nulla nel punto d'equilibrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0)$  e positiva in un suo intorno, pertanto una buona scelta di parametri risulta essere:  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma = \delta = 0$ . Considerando poi la funzione

$$\Delta V(x_1, x_2) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)),$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= \alpha x_1(t+1)^2 + \beta x_2(t+1)^2 - \alpha x_1(t)^2 - \beta x_2(t)^2 \\ &= \alpha ((4x_1^2 + 3x_2^2)x_1)^2 + \beta ((4x_1^2 + 3x_2^2)x_2)^2 - \alpha x_1(t)^2 - \beta x_2(t)^2 \\ &= (\alpha x_1^2 + \beta x_2^2) ((4x_1^2 + 3x_2^2)^2 - 1), \end{aligned}$$

il cui primo fattore è positivo. Il secondo fattore risulta negativo per tutti i punti interni all'ellisse  $4x_1^2 + 3x_2^2 = 1$ , che corrispondono a un intorno di  $\mathbf{x}_e$ .  $\Delta V$  risulta definita negativa e pertanto l'origine risulta punto di equilibrio asintoticamente stabile.

**Esercizio 2.** i) [3.5 punti] È immediato verificare che il sistema si trova in forma standard di osservabilità, dal momento che la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [0 \quad 1] \right)$$

è osservabile, e la matrice  $F_{22}$  del sottosistema non osservabile è pari a  $F_{22} = [-1]$ . Pertanto è possibile allocare come polinomio caratteristico della matrice  $F+LH$  tutti e soli i polinomi multipli di  $\Delta_{F_{22}}(s) = s+1$ . Ora la richiesta sui modi di  $F+LH$  corrisponde alla richiesta di attribuire come polinomio minimo di  $F+LH$  il polinomio  $\psi_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)$ . Tale polinomio minimo è compatibile con due polinomi caratteristici, entrambi allocabili:  $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)^2(s+2)$

e  $\Delta_{F+LH}(s) = (s+1)(s+2)^2$ . Ora, se attribuisco alla matrice  $L$  la struttura parametrica  $L = [a \ b \ c]^\top$ , la matrice  $F + LH$  diventa

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 1+c & -1 \end{bmatrix}$$

ed è immediato vedere che attribuendo a  $c$  il valore  $-1$  la matrice diventa diagonale a blocchi, ovvero

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 2+a & 0 \\ 1 & 1+b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} + L_1 H_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se allora attribuiamo alla matrice  $F_{11} + L_1 H_1$  il polinomio caratteristico  $(s+1)(s+2)$ , per la struttura diagonale a blocchi di  $F + LH$  saremo certi che la forma di Jordan di  $F + LH$  sia

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e quindi che la matrice abbia esattamente i modi desiderati. Imponiamo, quindi,

$$\Delta_{F_{11}+L_1 H_1}(s) = s^2 - (1+b)s - (2+a) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2,$$

ottenendo  $a = b = -4$ . Si ha, in tal modo,  $L = [-4 \ -4 \ -1]^\top$ .

ii) [3 punti] La matrice  $F + LH$  determinata al punto precedente è pari a

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la sua forma di Jordan è pari a

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò significa che la matrice  $T$  di cambio base sarà del tipo

$$T = [v_1 \ v_2 \ v_3],$$

con  $v_1$  autovettore relativo a  $-2$  e  $v_2$  e  $v_3$  due autovettori linearmente indipendenti relativi a  $-1$ . In realtà il conto può essere significativamente semplificato, tenendo conto del fatto che  $F + LH$  è diagonale a blocchi e quindi come matrice  $T$  possiamo scegliere

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dove  $w_1$  e  $w_2$  sono due autovettori in  $\mathbb{R}^2$  di  $F_{11} + L_1 H_1$  relativi, rispettivamente, a  $-2$  e  $-1$ . Si trova  $w_1 = [1 \ 1]^\top$ ,  $w_2 = [2 \ 1]^\top$ , da cui

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} e^{Ft} &= T e^{Jt} T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$e(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} e(0) = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + 2(e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ (e^{-t} - e^{-2t})e_1(0) + (2e^{-2t} - e^{-t})e_2(0) \\ e^{-t}e_3(0) \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Calcoliamo dapprima la matrice di raggiungibilità del sistema, che risulta:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ed ha rango pieno. Pertanto, essendo il sistema raggiungibile, possiamo rendere il sistema retroazionato asintoticamente stabile e quindi, a maggior ragione, BIBO stabile. Assumendo per  $K$  la forma parametrica  $K = [a \ b \ c]$ , la matrice  $F + GK$  risulta

$$F + GK = \begin{bmatrix} -a & 2 - b & -c \\ 1 + a & 1 + b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

che per  $c = 0$  risulta triangolare a blocchi inferiore. Il polinomio caratteristico diventa  $\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)[(s+a)(s-1-b) - 2 + ab - 2a + b] = (s+1)(s^2 + (a-b-1)s + (-3a+b-2))$ . Applicando Cartesio al polinomio di secondo grado possiamo dire che il polinomio risultante è di Hurwitz se e solo se  $a-b-1 > 0$  e  $-3a+b-2 > 0$ . Imponendo, ad esempio,  $\Delta_{F+GK}(s) = (s+1)^3$ , si ottiene  $a-b-1 = 2$  e  $-3a+b-2 = 1$ , da cui  $a = -3$  e  $b = -6$ . La matrice di retroazione risulta in questo caso  $K = [-3 \ -6 \ 0]$ .

**Esercizio 3.** i) [2 punti] Il calcolo della matrice di osservabilità porge:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -a \end{bmatrix}.$$

È facile quindi vedere che tale matrice ha rango 3 per ogni  $a \neq 0$ . Quindi per  $a = 0$  non è osservabile, mentre per tutti gli altri valori di  $a$  lo è. Certamente se è osservabile è pure ricostruibile. Verichiamo ora se il sistema è ricostruibile per  $a = 0$ . Per tale valore del parametro  $a$  la matrice  $F$  diventa

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e non ha autovalori nulli, quindi certamente l'unico autovalore del sottosistema non osservabile non può essere nullo. Pertanto per  $a = 0$  il sistema non è nemmeno ricostruibile.

ii) [4.5 punti] È facile verificare che per  $a = 0$  la coppia  $(F, H)$  è in forma standard di osservabilità, giacché la coppia

$$(F_{11}, H_1) = \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, [1 \ 0] \right)$$

è osservabile, e la matrice del sottosistema non osservabile è pari a  $F_{22} = [1/2]$ . Esiste pertanto uno stimatore asintotico che attribuisce come polinomio caratteristico di  $F + LH$  il polinomio  $\Delta_{F+LH}(z) = (z - \frac{1}{2})^3$ .

Posto  $L = [L_1^\top \mid L_2^\top]^\top = [a \ b \ c]^\top$  si trova

$$F + LH = \begin{bmatrix} 1+a & -1 & 0 \\ 2+b & 0 & 0 \\ c+1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che  $\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = (z - \frac{1}{2})^2$  ovvero che

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(z) = (z - 1 - a)z + (2 + b) = z^2 - (1 + a)z + (2 + b) = z^2 - z + \frac{1}{4},$$

si ottiene

$$L = [0 \ -\frac{7}{4} \ c]^\top,$$

con  $c$  parametro arbitrario in  $\mathbb{R}$ .

Per quanto riguarda la parte di controllo, è immediato verificare che la coppia  $(F, G)$  è raggiungibile e quindi certamente esiste un controllore  $K$  che attribuisce come polinomio caratteristico di  $F + GK$  il polinomio  $\Delta_{F+GK}(z) = (z - \frac{1}{2})^3$ . Posto

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

si trova

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1+a_2 & -1+b_2 & c_2 \\ 2+a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

la soluzione più semplice consiste nell'eguagliare la precedente matrice parametrica alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene in tal modo

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) [3 punti] Ricordiamo che la matrice del sistema complessivo, nell'ipotesi di assumere come vettore di stato  $[x(t)^\top \quad e(t)^\top]^\top$ , è data da

$$F_{\text{tot}} = \begin{bmatrix} F + GK & -GK \\ 0 & F + LH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Per quanto concerne la funzione di trasferimento, ci ricordiamo dalla teoria che essa coincide con quella del sistema retroazionato  $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$ . Si trova, pertanto,

$$W_{\text{tot}}(z) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z - 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & z - 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & z - 1/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[ 0 \quad \frac{1}{z-1/2} \right].$$

**Teoria.** [5 punti] Si veda il libro di testo, E.Fornasini-G.Marchesini “Appunti di Teoria dei Sistemi”, Ed. Libreria Progetto, Padova, al capitolo su Raggiungibilità e Controllabilità.