COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI - 7 CFU e 9 CFU
12 Luglio 2010

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - a^2u(t),$$

dove a è un parametro reale.

i) **[solo per corso da 7 CFU]** Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$,

ii) si determini, se esiste, l'espressione della risposta di regime permanente del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \cos t\ \delta_{-1}(t)$$

ed alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1, \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = -3;$$

iii) **[solo per corso da 7 CFU]** si determini l'espressione dell'ingresso $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita a gradino in evoluzione forzata, ovvero

$$y(t) = y_f(t) = \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. Sia

$$G(s) = \frac{(s-0.1)(10s+100)}{s(s^2+0.2s+1)(s+0.1)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

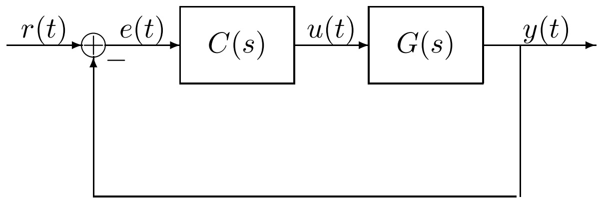
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1-0.1s}{s(1+s)}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo



si progetti, se possibile, un controllore PD

$$C_{PD}(s) = K_p + K_d s \in \mathbb{R}[s]$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) pari a 0.1;

2) abbia due poli stabili reali, p_1 e p_2, con $p_1 \cdot p_2 = 100$.

Esercizio 4. [solo per corso da 9 CFU] Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) - \frac{a^2}{4} y(t-2) = u(t) - a u(t-1).$$

i) Si studi al variare di a in $\mathbb{R}$ stabilità asintotica e BIBO del sistema.

Assumendo nel seguito dell'esercizio, $a = 1$,

ii) si determini l'espressione dell'uscita in evoluzione libera in corrispondenza alle condizioni iniziali $y(-1) = 0, y(-2) = 8$;

iii) si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema.

Teoria. Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$0 = s^3 + 2s^2 + 5s + a.$$

Per valutare per quali valori di a il polinomio $d(s)$ è un polinomio di Hurwitz utilizziamo la tabella di Routh. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & a \\ 1 & \dfrac{10-a}{2} & 0 \\ 0 & a & 0 \end{array}$$

e pertanto $d(s)$ è Hurwitz se e solo se $10 - a > 0$ e $a > 0$, ovvero $0 < a < 10$. Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 10$.

Per quanto concerne la stabilità BIBO, certamente il sistema è BIBO stabile per tutti i valori del parametro a per cui è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2 - a^2}{s^3 + 2s^2 + 5s + a}.$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo due zeri: uno in a ed uno in $-a$, zeri che diventano coincidenti (e collocati in 0) per $a = 0$. Consideriamo prima il caso $a = 0$. Per tale valore del parametro a si trova

$$W(s) = \frac{s^2}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}.$$

Pertanto, per la regola dei segni di Cartesio, possiamo dire che il sistema è BIBO stabile.

Consideriamo ora il caso $a \neq 0$ e valutiamo per quali valori di a lo zero in a si semplifica con il polinomio al denominatore. Ciò si verifica se e solo se

$$d(a) = a^3 + 2a^2 + 5a + a = a(a^2 + 2a + 6) = 0,$$

ed avendo assunto $a \neq 0$ ciò si verifica se e solo se $a^2 + 2a + 6 = 0$. Poichè questo polinomio di secondo grado nella variabile a ha tutti i coefficienti positivi, le sue radici sono a parte reale negativa, ma allora o sono complesse (e allora corrispondono a valori non compatibili con il fatto che a sia parametro reale) oppure sono reali e negative ma in tal caso portano alla cancellazione di uno zero "stabile" (e, di consequenza, non permettono di conseguire la stabilità BIBO senza aver già la stabilità asintotica).

Valutiamo, ora, per quali valori di a lo zero in $-a$ si semplifica con il polinomio al denominatore. Ciò si verifica se e solo se

$$d(-a) = -a^3 + 2a^2 - 5a + a = -a(a^2 - 2a + 4) = 0,$$

ed avendo assunto $a \neq 0$ ciò si verifica se e solo se $a^2 - 2a + 4 = 0$. In questo caso l'equazione di secondo grado ha due radici complesse coniugate e ciò significa che non si annulla per nessun valore reale di a, pertanto tale semplificazione non è mai possibile.

Ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se $0 \leq a < 10$.

ii) [4.5 punti] Per $a = 0$ il sistema viene descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2}.$$

Si tratta di un sistema non asintoticamente stabile, ma, in base all'analisi del precedente punto i), BIBO stabile. Per questa ragione esiste la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale assegnato se e solo se l'evoluzione libera in corrispondenza alle specifiche condizioni iniziali assegnate risulta convergente a zero. Andiamo quindi a valutarla. I modi del sistema sono $1, e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)$, e pertanto l'espressione della generica evoluzione libera d'uscita sarà

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t}\cos(2t) + c_3 e^{-t}\sin(2t).$$

Il calcolo delle derivate di ordine 1 e 2 della $y_\ell(t)$ porge:

$$\begin{aligned} \frac{dy_\ell}{dt} &= (2c_3 - c_2)e^{-t}\cos(2t) + (-c_3 - 2c_2)e^{-t}\sin(2t) \\ \frac{d^2y_\ell}{dt^2} &= (-4c_3 - 3c_2)e^{-t}\cos(2t) + (-3c_3 + 4c_2)e^{-t}\sin(2t). \end{aligned}$$

Se ora imponiamo il soddisfacimento delle condizioni iniziali:

$$\begin{array}{rcccl} 1 = & y(0^-) & = & y_\ell(0^-) & = c_1 + c_2, \\ -1 = & \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{dy_\ell(t)}{dt}\right|_{t=0^-} & = -c_2 + 2c_3, \\ -3 = & \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = & \left.\frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}\right|_{t=0^-} & = -3c_2 - 4c_3, \end{array}$$

è immediato, allora, rendersi conto del fatto che

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad c_3 = 0.$$

Pertanto

$$y_\ell(t) = e^{-t}\cos(2t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esiste allora la risposta di regime permanente al segnale $u(t)$ ed essa assume la forma

$$y_{rp}(t) = |W(j)| \cdot \cos(t + \arg W(j)).$$

Si trova (per $a = 0$)

$$W(j) = \frac{j}{-1 + 2j + 5} = \frac{j}{4 + 2j}$$

e quindi

$$|W(j)| = \frac{1}{\sqrt{20}}, \qquad \arg W(j) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 1.107 \text{ rad}.$$

iii) [3 punti] La trasformata di Laplace dell'uscita (forzata) è

$$Y_f(s) = \frac{1}{s} = W(s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 5}U(s).$$

Da cui segue

$$U(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^2} = 1 + 2\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s^2},$$

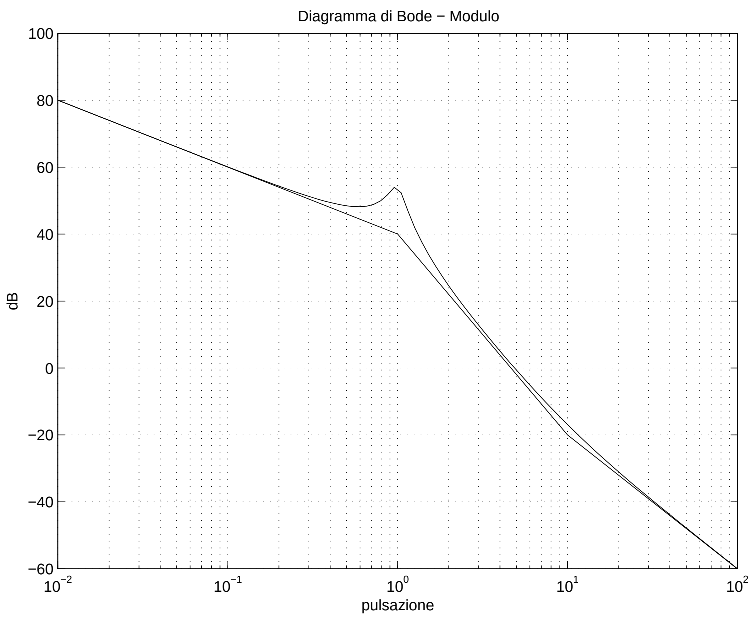
che corrisponde alla funzione del tempo

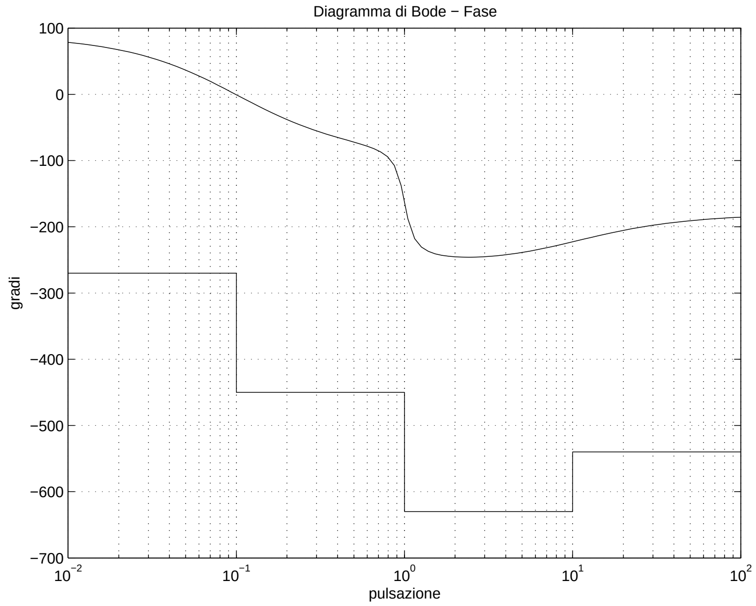
$$u(t) = \delta(t) + (2 + 5t)\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

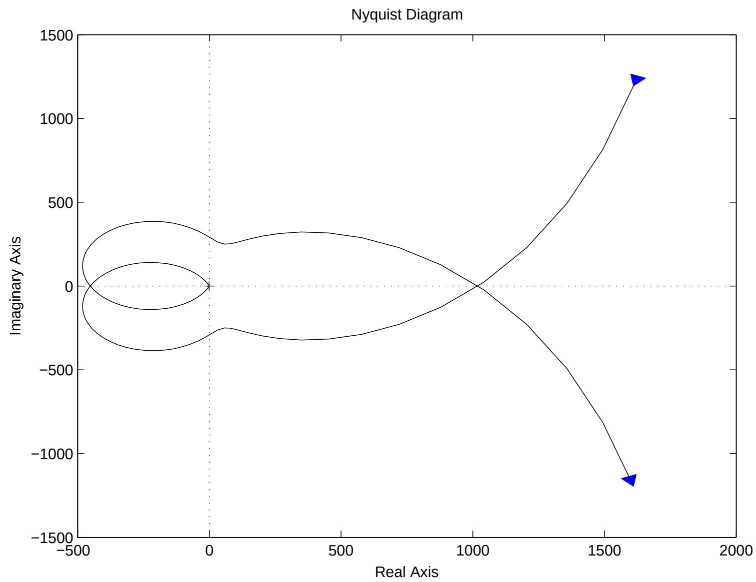
$$G(s) = \frac{(s - 0.1)(10s + 100)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(s + 0.1)} = -100\frac{(1 - 10s)(1 + 0.1s)}{s(s^2 + 0.2s + 1)(1 + 10s)}.$$

Pertanto $K_B = -100$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo con $1/T_1' = 10$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale positivo con $1/T_2' = -0.1$ e $\mu_2' = 1$, un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale negativo con $1/T = 0.1$ e $\mu = 1$ e un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = 1$ e smorzamento $\xi = 1/10 = 0.1$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



NOTA: la figura non lo evidenzia (per problemi numerici), ma il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ attraversa il semiasse reale negativo due volte e arriva, per $\omega \to +\infty$, nell'origine con fase di $-180°$.

$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato, osservando (a partire dal diagramma di Bode) che i punti di intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo sono a sinistra del punto critico, si deduce $N = -3$, ne consegue che $n_{W+} = 3$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha tre poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [4 punti] Poichè $C_{PD}(s) = K_p\left(1 + \frac{K_d}{K_p}s\right)$ e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_{PD}(s)G(s)$ presenta un polo nell'origine, il sistema retroazionato è di tipo 1 e l'espressione dell'errore di regime permanente alla rampa unitaria è data da

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(G)K_p}$$

dove $K_B(G)$ è il guadagno di Bode di $G(s)$ (in questo caso di valore 1). Imponendo $e_{rp}^{(2)} = 0.1$ si trova

$$\frac{1}{K_B(G)K_p} = \frac{1}{K_p} = 0.1,$$

da cui segue $K_p = 10$. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato diventa allora

$$W(s) \quad = \quad \frac{C_{PD}(s)G(s)}{1 + C_{PD}(s)G(s)} = \frac{(1-0.1s)\,10\,(1+Ts)}{s(1+s) + (1-0.1s)\,10\,(1+Ts)} = \frac{(1-0.1s)\,10\,(1+Ts)}{(1-T)s^2 + 10Ts + 10},$$

dove

$$T = \frac{K_d}{K_p}.$$

Tale funzione di trasferimento presenta poli "stabili" (ovvero a parte reale negativa) se e solo se

$$\begin{cases} 1 - T > 0 \\ 10T > 0 \end{cases},$$

ovvero $0 < T < 1$. Inoltre i poli della $W(s)$ coincidono con gli zeri del polinomio

$$s^2 + \frac{10T}{1-T}s + \frac{10}{1-T} = (s - p_1)(s - p_2),$$

da cui segue subito che

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{10}{1-T}.$$

Di conseguenza $p_1 \cdot p_2 = 100$ se e solo se $T = 0.9$. Tale valore è certamente compatibile con la condizione di BIBO stabilità. Si tratta infine di verificare che i due poli siano effettivamente reali e non complessi coniugati. A tal fine è sufficiente verificare che, una volta posto $T = 0.9$, il discriminante del polinomio caratteristico sia maggiore o guale a zero. Si trova

$$\left. s^2 + \frac{10T}{1-T}s + \frac{10}{1-T}\right|_{T=0.9} = s^2 + 90s + 100$$

il cui discriminante è

$$\Delta = 90^2 - 4 \cdot 100 > 0.$$

Pertanto il controllore PD desiderato ha parametri $K_p = 10$ e $K_d = 9$.

Esercizio 4. i) [3.5 punti] Per $a = 0$ il sistema è ancora proprio e viene descritto dall'equazione alle differenze

$$y(t) = u(t),$$

che è priva di dinamica di evoluzione libera, e pertanto è asintoticamente stabile e quindi pure BIBO stabile. Per $a \neq 0$, l'equazione caratteristica in z^{-1} è

$$1 - \frac{a^2}{4} z^{-2} = 0,$$

mentre l'equazione caratteristica in z è

$$z^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

Tale equazione ha radici $\pm\frac{|a|}{2}$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $|a| < 2$.

Valutiamo, ora, nel caso $a \neq 0$, la stabilità BIBO. Certamente c'è stabilità BIBO per $|a| < 2$. Verifichiamo se esistono valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia l'asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - \frac{a^2}{4} z^{-2}} = \frac{z(z-a)}{z^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Chiaramente si può avere stabilità BIBO senza avere quella asintotica se e solo se esiste un valore del parametro a in corrispondenza a cui avviene una cancellazione del fattore "instabile" $z - a$ tra numeratore e denominatore, e lo zero residuo al denominatore ha modulo minore di 1. Poiché i due zeri al denominatore hanno lo stesso modulo, ciò non è mai possibile. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se si ha stabilità asintotica ovvero per $|a| < 2$.

iii) [2 punti] Per $a = 1$ l'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

a cui corrispondono le due radici semplici $\pm\frac{1}{2}$. Pertanto l'evoluzione libera del sistema è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Imponendo

$$\begin{aligned} 0 &= y(-1) = y_\ell(-1) = c_1(-2) + c_2 2 \\ 8 &= y(-2) = y_\ell(-2) = c_1 4 + c_2 4 \end{aligned}$$

si trova $c_1 = c_2 = 1$.

iii) [2 punti] Per $a = 1$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 - \frac{1}{4}}.$$

Dalla decomposizione in fratti semplici di $W_1(z) = W(z)/z$

$$W_1(z) = \frac{z-1}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{z - \frac{1}{2}},$$

segue subito

$$W(z) = \frac{3}{2}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}},$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = \left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^t - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t\right]\delta_{-1}(t)$$

che rappresenta la risposta impulsiva del sistema.

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.