COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI - 7 CFU e 9 CFU
6 Settembre 2010

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 50\ \frac{s(s+10)}{(s+1)\,(s^2 - s + 100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+10s}{(1+s)(1+0.1s)},$$

i) si determini il tipo del sistema ed il relativo errore di regime permanente;

ii) si progetti un controllo in retroazione in modo tale che

1) il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) non superiore a $e^*_{rp} = 0.1$;
2) la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 50$ rad/sec e
3) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Esercizio 3. **[solo per corso da 7 CFU]** Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1-4a}{2}\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\frac{du(t)}{dt} + u(t),$$

con a parametro reale.

i) Si studi al variare di a in $\mathbb{R}$ stabilità asintotica e BIBO del sistema;

ii) si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'espressione della risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 4. [solo per corso da 9 CFU] Consideriamo il sistema LTI a tempo discreto e causale descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(t) + \frac{1-4a}{2}y(t-1) - ay(t-2) = u(t) + 2u(t-1) + u(t-2),$$

con a parametro reale.

i) Si studi al variare di a in $\mathbb{R}$ stabilità asintotica e BIBO del sistema;

ii) si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'espressione della risposta impulsiva del sistema.

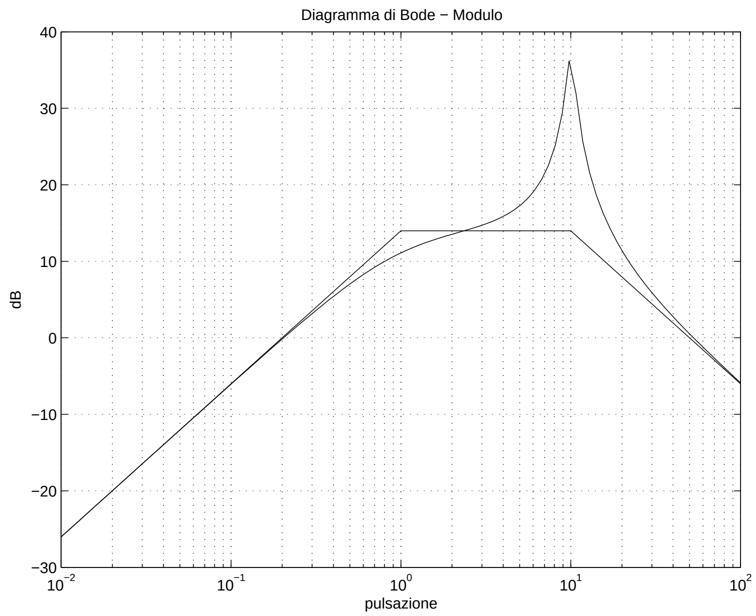
Teoria. Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si dimostrino analiticamente le caratterizzazioni di tipo ed errore di regime permanente per sistemi di tipo 0, 1 e 2 in funzione di $W(0), dW(0)/ds$ e $d^2W(0)/ds^2$.

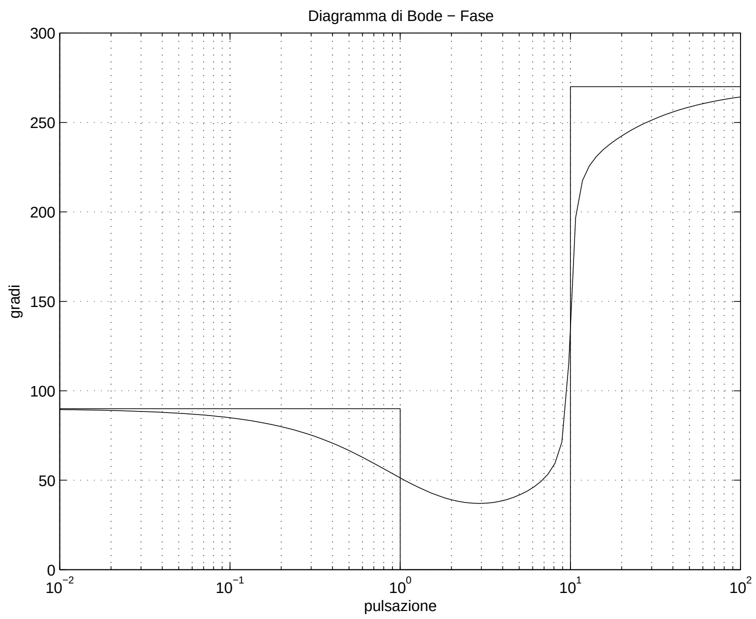
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

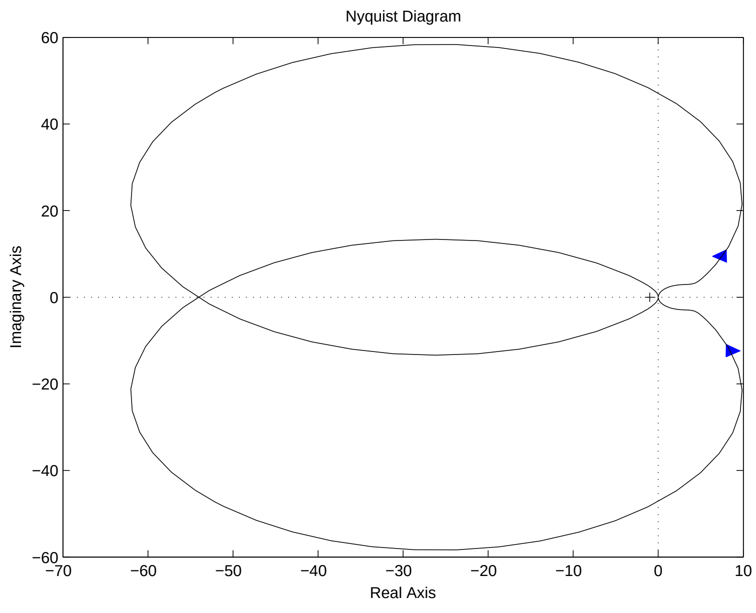
$$G(s) = 5 \frac{s\left(1 + \frac{s}{10}\right)}{(1+s)\left(\frac{s^2}{10^2} - 2 \cdot 0.05 \frac{s}{10} + 1\right)}.$$

Pertanto $K_B = 5$ e la risposta in frequenza presenta uno zero semplice nell'origine ($\nu = -1$), uno zero reale negativo in -10 ($1/T' = 10$ e $\mu' = 1$), un polo reale negativo in -1 ($1/T = 1$ e $\mu = 1$) ed una coppia di poli complessi conigati con $\omega_n = 10$ e $\xi = -0.05$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due poli complessi coniugati hanno parte reale positiva e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Il diagramma di Nyquist compie due giri in verso antiorario attorno a $-1+j0$, ovvero $N=2$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+}=2$, la condizione $N=2$ assicura $n_{W+}=0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 2. i) [2.5 punti] È immediato verificare che $G(0)=1$, pertanto il sistema è di tipo 1 o superiore. Il calcolo della derivata di $G(s)$ valutata in 0 fornisce:

$$\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1+10s}{0.1s^2+1.1s+1}\right)\right|_{s=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{10(0.1s^2+1.1s+1)-(1+10s)(0.2s+1.1)}{(0.1s^2+1.1s+1)^2}\right|_{s=0} \\
&= \frac{10-1.1}{1} = 8.9 \neq 0.
\end{aligned}
$$

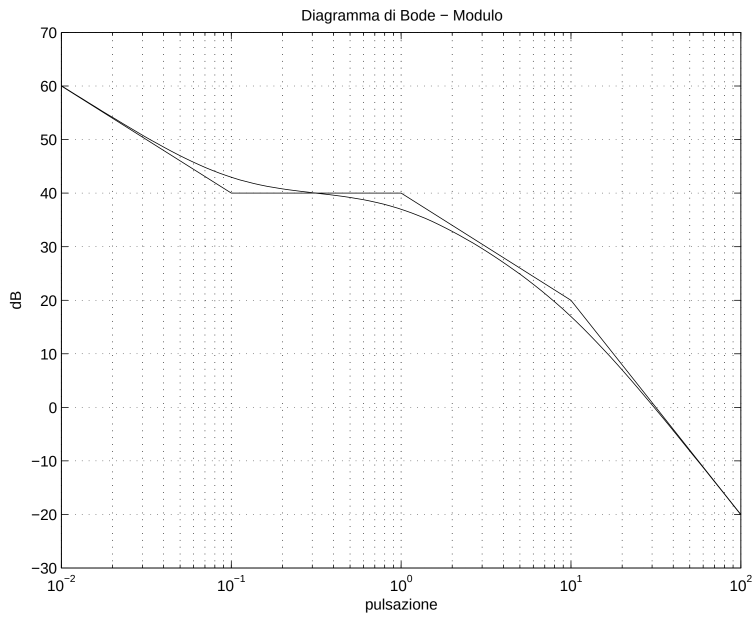
Pertanto il sistema è di tipo esattamente 1 e l'errore di regime permanente alla rampa lineare vale $e_{rp}^{(2)} = -8.9$.

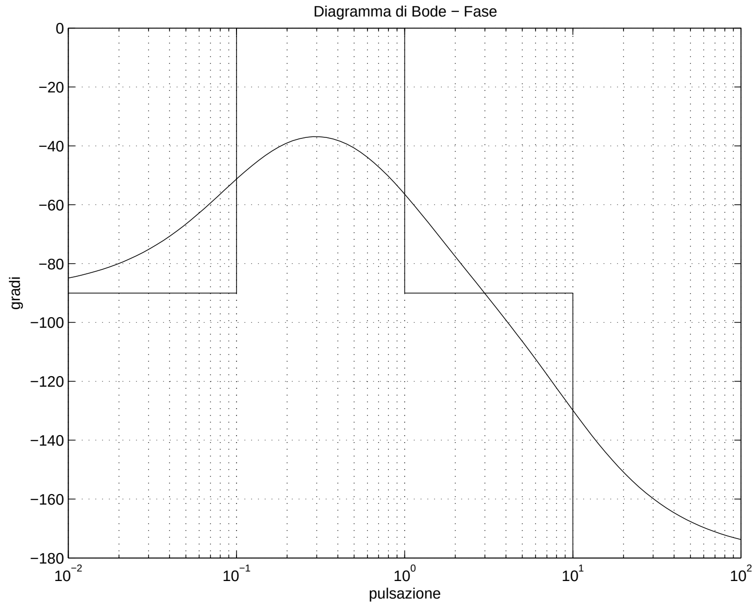
ii) [5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$
e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)} \leq 0.1
$$

da cui segue $K_B(C) \geq 10$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{10}{s}$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:





Si trova $10^{3/2}$ rad/s $\approx \omega_A < \omega_A^* = 50$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $12° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze fino a far sì che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 50$ rad/s e di sollevare la fase di almeno 33°. Poiché $|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{db} = -8.13dB$, la lettura delle tabelle con i parametri delle reti anticipatrici fornisce, ad esempio,

$$\alpha = 0.25, \qquad u = \omega_A^* T = 3,$$

da cui

$$\alpha = 0.25, \qquad T = 3/50 = 0.06$$

e quindi

$$C_{ant}(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T} = \frac{1+s0.06}{1+s0.015}.$$

In questo modo il diagramma delle ampiezze viene sollevato di poco più di 8 dB e il diagramma delle fasi di 34°-35°. Questa soluzione corrisponde a

$$C(s) = 10\frac{1+s0.06}{s(1+s0.015)}.$$

Esercizio 3. i) [3.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + \frac{1-4a}{2}s - a = 0.$$

Tale equazione ha radici $2a$ e $-1/2$, e quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$.

Valutiamo, ora, la stabilità BIBO. Certamente c'è stabilità BIBO per $a < 0$. Verifichiamo se esistono valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia l'asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2 + \frac{1-4a}{2}s - a} = \frac{(s+1)^2}{(s-2a)\left(s+\frac{1}{2}\right)}.$$

Chiaramente si può avere stabilità BIBO senza avere quella asintotica se e solo se esiste un valore del parametro $a \geq 0$ in corrispondenza a cui avviene una cancellazione del fattore instabile $s - 2a$ tra numeratore e denominatore. Poiché il numeratore ha solo uno zero (doppio) stabile, tale cancellazione non puó mai avere luogo, ovvero non è possibile avere stabilità BIBO in assenza di stabilità asintotica. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $a < 0$.

ii) [4 punti] Distinguiamo due casi, a seconda che la funzione di trasferimento abbia due poli coincidenti o distinti. Per $a = -1/4$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{(s+1)^2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Dalla decomposizione in fratti semplici di $W(s)$

$$W(s) = 1 + \frac{s+3/4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} = 1 + \frac{s+1/2}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1/4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{1/4}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2},$$

segue subito

$$w(t) = \delta(t) + \left[e^{-t/2} + \frac{1}{4}te^{-t/2}\right]\delta_{-1}(t)$$

che rappresenta la risposta impulsiva del sistema. Nel caso in cui a sia diverso da $-1/4$, la decomposizione in fratti semplici di $W(s)$ porta a

$$W(s) = 1 + \frac{\left(\frac{3}{2}+2a\right)s + (1+a)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)(s-2a)} = 1 - \frac{1}{2(1+4a)}\frac{1}{s+\frac{1}{2}} + \frac{2(4a^2+4a+1)}{1+4a}\frac{1}{s-2a}$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = \delta(t) + \left[-\frac{1}{2(1+4a)}e^{-t/2} + \frac{2(4a^2+4a+1)}{1+4a}e^{2at}\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 4. i) [3.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema in z^{-1} è

$$1 + \frac{1-4a}{2}z^{-1} - az^{-2} = 0,$$

mentre l'equazione caratteristica in z è

$$z^2 + \frac{1-4a}{2}z - a = 0.$$

Tale equazione ha radici $2a$ e $-1/2$, e quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $|2a| < 1$, ovvero $-1/2 < a < 1/2$.

Valutiamo, ora, la stabilità BIBO. Certamente c'è stabilità BIBO per $-1/2 < a < 1/2$. Verifichiamo se esistono valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia l'asintotica. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + \frac{1-4a}{2} z^{-1} - az^{-2}} = \frac{(z+1)^2}{z^2 + \frac{1-4a}{2} z - a} = \frac{(z+1)^2}{(z-2a)\left(z+\frac{1}{2}\right)}.$$

Chiaramente si può avere stabilità BIBO senza avere quella asintotica se e solo se esiste un valore del parametro a in corrispondenza a cui avviene una cancellazione del fattore "instabile" $z+1$ tra numeratore e denominatore. Ciò si verifica se e solo se $z - 2a = z + 1$, ovvero $a = -1/2$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $-1/2 \leq a < 1/2$.

ii) [4 punti] Distinguiamo due casi, a seconda che la funzione di trasferimento abbia due poli coincidenti o distinti. Per $a = -1/4$ la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(z) = \frac{(z+1)^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Dalla decomposizione in fratti semplici di $W_1(z) = W(z)/z$

$$W_1(z) = \frac{(z+1)^2}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{z} - \frac{3}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2},$$

segue subito

$$W(z) = 4 - \frac{3z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2},$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = 4\delta(t) + \left[-3\left(-\frac{1}{2}\right)^t - \frac{1}{2}\binom{t}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]\delta_{-1}(t)$$

che rappresenta la risposta impulsiva del sistema. Nel caso in cui a sia diverso da $-1/4$, la decomposizione in fratti semplici di $W(z)$ porta a

$$W(z) = 1 + \frac{\left(\frac{3}{2}+2a\right)z + (1+a)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-2a)} = 1 - \frac{1}{2(1+4a)}\frac{1}{z+\frac{1}{2}} + \frac{2(4a^2+4a+1)}{1+4a}\frac{1}{z-2a}$$

la cui antitrasformata è

$$w(t) = \delta(t) + \left[-\frac{1}{2(1+4a)}\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} + \frac{2(4a^2+4a+1)}{1+4a}(2a)^{t-1}\right]\delta_{-1}(t-1).$$

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 6 del libro di testo, pagine 164-167.