Esercizi di Controlli Automatici - 2
A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Si calcolino le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

i) $f(t) = (t + \cos t)\ \delta_{-1}(t)$;

ii) $f(t) = t + \cos t + t^3$;

iii) $f(t) = \sin t + e^t\ \delta_{-1}(t)$;

iv) $f(t) = (1 + t - t^2)\ \delta_{-1}(t)$;

v) $f(t) = te^t + e^t\ \delta(t) + 2\delta_1(t)$;

vi) $f(t) = te^{-t}\ \delta_{-1}(-t) + 5e^{-t}\cos(4t)\ \delta_{-1}(t)$;

vii) $f(t) = (t + e^{2t}\sin t)\ \delta_{-1}(t)$;

viii) $f(t) = \sin(5t)\ \delta_{-1}(-t) - e^{t-1}\delta_{-1}(t+4)$;

ix) $f(t) = te^t \sin t - \cos(t + \phi)$;

x) $f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + te^t\delta_{-1}(t)$.

Si calcolino le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali nell'indeterminata s:

i) $F(s) = \dfrac{s^2}{s-1}$;

ii) $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$;

iii) $F(s) = \dfrac{s^2-1}{s(s+1)}$;

iv) $F(s) = \dfrac{s-2}{(s+3)^2(s+5)}$;

v) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s+5)}$;

vii) $F(s) = \dfrac{s^2+2}{s^2}$;

viii) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$;

ix) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s-1)^2}$;

x) $F(s) = \dfrac{s^2}{s^2+4s+20}$;

xi) $F(s) = \dfrac{s^2-1}{s(s^2-4)}$;

xii) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2s + 5}$;

xiii) $F(s) = \dfrac{s^4 + 2}{(s^2 + 2s + 5)s}$;

xiv) $F(s) = \dfrac{s - 2}{(s^2 + 1)(s - 1)^2}$.

Esercizio 2. Un oscillatore elettronico è modellato dall'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = ku(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove y è l'uscita, u l'ingresso, ω_0 e k sono costanti reali positive del sistema.

i) Si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni inziali

$$y(0^-) = 2 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0.$$

ii) Si determini la funzione di trasferimento e, conseguentemente, la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = (1 + t)\, \delta_{-1}(t)$, facendo uso delle trasformate di Laplace.

Esercizio 3. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1 - a)\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in [0, +\infty),$$

dove a è un numero reale.

i) Si determini, al variare di a, la funzione di trasferimento del sistema e se ne evidenzino poli e zeri.

ii) Si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, la risposta in evoluzione forzata al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t - 1) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \geq 1, \\ 0, & \text{per } t < 1. \end{cases}$$

iii) Si determini, al variare di a e facendo uso delle trasformate di Laplace, il segnale di ingresso $u(t)$ a cui corrisponde, in evoluzione forzata, l'uscita $y(t) = y_f(t) = e^{at}\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema dinamico

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in [0, +\infty).$$

i) Si determini la funzione di trasferimento del sistema;

ii) si determini, se possibile, un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale di ordine 1 e un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale di ordine 3 aventi la medesima risposta impulsiva;

iii) si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, le condizioni iniziali a cui corrisponde un'uscita in evoluzione libera del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t}.$$

iv) si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, le sollecitazioni in ingresso a cui corrisponde un'uscita in evoluzione forzata del tipo

$$y_f(t) = (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t})\delta_{-1}(t).$$