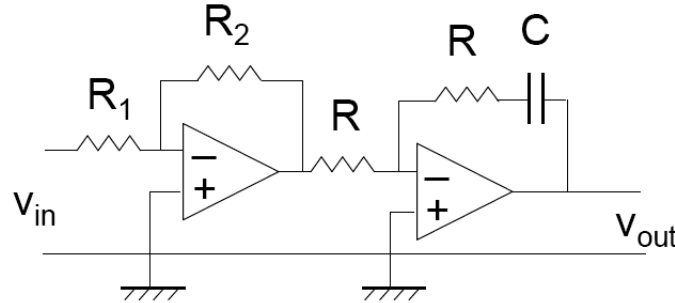


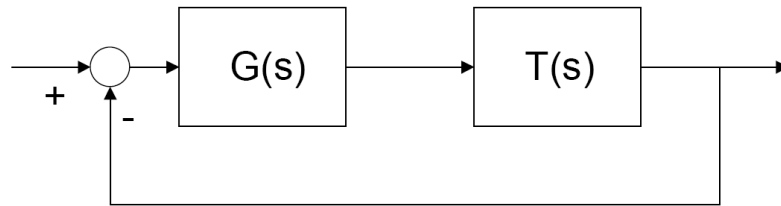
Esercizi di Controlli Automatici - 9

A.A. 2009/2010

Esercizio 1. Dato il seguente schema, in cui gli amplificatori operazionali sono supposti ideali,



si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ tra $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$. Si consideri, poi, la seguente connessione in retroazione

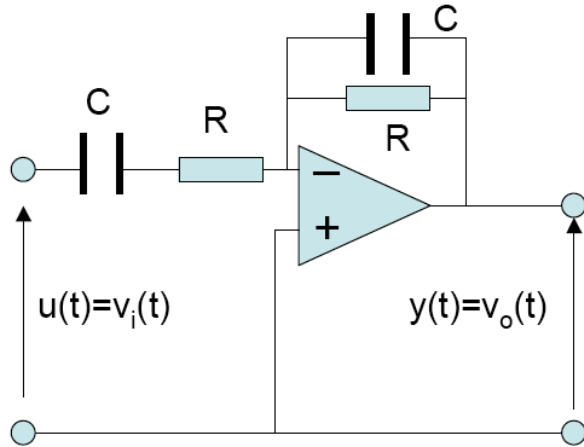


dove $T(s) = \frac{2}{s+2}$. Si determinino i valori del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e del prodotto RC , sapendo che il sistema ad anello chiuso è BIBO stabile, risponde alla rampa lineare unitaria $\delta_{-2}(t) = t\delta_{-1}(t)$ con un errore a regime pari a $e_{rp}^{(2)} = 0.1$ e la funzione di trasferimento ad anello aperto $T(s)G(s)$ ha pulsazione di attraversamento pari a $\omega_A = 10 \text{ rad/s}$.

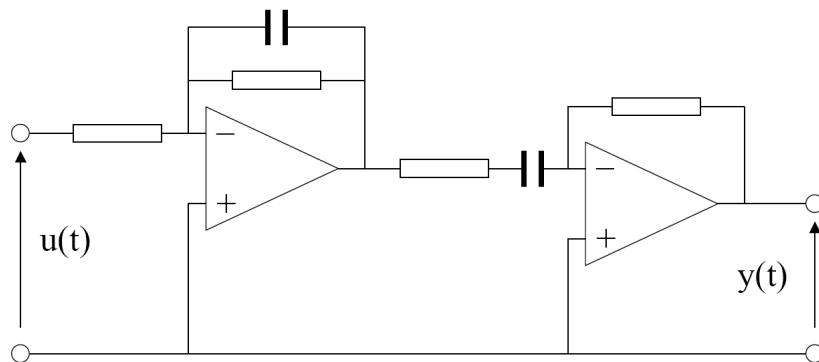
Esercizio 2. Si consideri lo schema di figura e si assuma che l'operazionale sia quasi ideale, nel senso che le correnti di ingresso siano nulle e le correnti di uscita completamente arbitrarie. Per quanto riguarda la relazione tra tensione differenziale

di ingresso e tensione d'uscita, invece, si ipotizzi che $V_{out}(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$. Si supponga, inoltre, che le resistenze siano uguali, i condensatori uguali e valga $RC = 1$.

- i) Nell'ipotesi di operazionale ideale, ovvero $G(s) = +\infty$, si determini la funzione di trasferimento del sistema di ingresso $u(t) = v_{in}(t)$ ed uscita $y(t) = v_{out}(t)$.
- ii) Nell'ipotesi in cui $G(s) = \frac{K}{1+s}$, si esprima il legame ingresso-uscita tramite un opportuno schema a blocchi e se ne calcoli la funzione di trasferimento.
- iii) Nelle stesse ipotesi del punto precedente, si studi (con il metodo di Routh) la stabilità BIBO del sistema e si verifichi che per $K > 0$ si ha stabilità BIBO, mentre per $K < 0$ (che corrisponde ad uno scambio tra i morsetti $+$ e $-$) si ha instabilità, non appena $|K| \geq 1$.



Esercizio 3. Si consideri lo schema di figura, in cui si assume che l'operazionale sia ideale, le resistenze siano entrambe uguali a R , i condensatori entrambi uguali a C , il prodotto RC valga 1, $u(t)$ sia la tensione d'ingresso $v_{in}(t)$ e $y(t)$ la tensione d'uscita $v_{out}(t)$.



È richiesto di:

- i) calcolare la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema;
- ii) calcolare la risposta al gradino $w_{-1}(t)$ del sistema;
- iii) determinare la pulsazione $\omega_r > 0$ in corrispondenza alla quale la risposta in frequenza $W(j\omega)$, $\omega \geq 0$, del sistema complessivo assume valore massimo e successivamente determinare $|W(j\omega_r)|$ e $\arg(W(j\omega_r))$.

Soluzioni

Esercizio 1. Il primo operazionale ha come funzione di trasferimento $G_1(s) = -\frac{R_2}{R_1}$, mentre il secondo $G_2(s) = -\frac{1+sRC}{sRC}$, per cui la loro connessione in serie ha funzione di trasferimento $G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{R_2}{R_1RC} \frac{1+sRC}{s}$. Scrivendo in forma di Bode $T(s)$, si perviene a

$$T(s)G(s) = \frac{R_2}{R_1RC} \frac{1+sRC}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right)}$$

che ha un polo nell'origine di molteplicità unitaria e guadagno di Bode $K_B = \frac{R_2}{R_1RC}$. Pertanto il sistema retroazionato è di tipo 1 e risponde alla rampa lineare unitaria con errore di regime permanente (costante e non nullo)

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B} = \frac{R_1RC}{R_2} = 0.1.$$

da cui $R_2 = 10R_1RC$. Sostituendo l'espressione di R_2 in $G(s)T(s)$, si ottiene

$$G(s)T(s) = 10 \frac{1+sRC}{s \left(1 + \frac{s}{2}\right)}.$$

Poiché la pulsazione di attraversamento del solo termine $\frac{10}{s}$ è proprio pari a 10 rad/s, ne consegue che per attribuire a $T(s)G(s)$ quella pulsazione di attraversamento deve aver luogo una cancellazione zero/polo, cioè deve valere $RC = 0.5$ e quindi $G(s)T(s) = \frac{10}{s}$. Un modo alternativo per giungere a questa soluzione è quello di imporre $|G(10j)T(10j)| = 1$, il che conduce facilmente allo stesso risultato. La stabilità BIBO del sistema in catena chiusa è evidente. In definitiva, quindi, si trova $RC = 0.5$ e $\frac{R_2}{R_1} = 5$.

Esercizio 2. Operando come al solito sullo schema in configurazione invertente (con $U(s) = V_{in}(s)$ e $Y(s) = V_{out}(s)$), si ottiene facilmente la relazione

$$\frac{1}{s+1}U(s) + \frac{s+1}{s}Y(s) = \frac{s^2+3s+1}{s(s+1)}V_-(s)$$

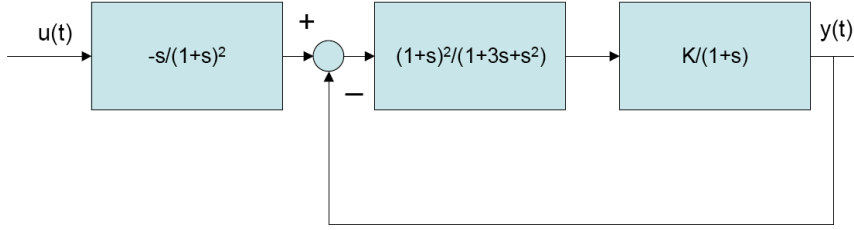
i) Nel caso di operazionale ideale, $V_-(s) = 0$ da cui segue che la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è data da

$$W(s) = -\frac{s}{(s+1)^2}.$$

ii) Nell'ipotesi in cui $G(s) = \frac{K}{1+s}$, si giunge alla relazione

$$V_-(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 1}U(s) + \frac{(s+1)^2}{s^2 + 3s + 1}Y(s), \quad Y(s) = -\frac{K}{(1+s)}V_-(s)$$

che conduce facilmente allo schema di figura



la cui funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{-Ks}{(s^2 + 3s + 1)(s + 1) + K(s + 1)^2}.$$

iii) Per studiare la stabilità del precedente sistema è necessario e sufficiente verificare per quali valori di K il polinomio $p(s) = s^3 + s^2(4 + K) + s(4 + 2K) + (1 + K)$ risulti Hurwitziano. Ricorrendo alla tabella di Routh

3	1	4 + 2K
2	4 + K	1 + K
1	$\frac{(K+3)(2K+5)}{4+K}$	0
0	K + 1	0

risulta evidente che per $K > -1$ la prima colonna è tutta positiva, mentre per $K \leq -1$ il segno (o l'essere nullo) dell'ultimo elemento di tale prima colonna denota instabilità. Alternativamente, una volta osservato che $p(s)$ fattorizza nel prodotto di $(s+1)$ per un polinomio di secondo grado, è immediata la verifica che tale polinomio di secondo grado è di Hurwitz se e solo se $K > -1$.

Esercizio 3. i) Le funzioni di trasferimento, rispettivamente, del primo blocco, del secondo blocco e complessiva sono:

$$W_1(s) = -\frac{1}{1 + RCs} = -\frac{1}{1 + s}, \quad W_2(s) = -\frac{sRC}{1 + sRC} = -\frac{s}{1 + s}$$

$$\Rightarrow W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{s}{(1+s)^2}$$

ii) La risposta al gradino del sistema è

$$W_{-1}(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{(1+s)^2}$$

da cui segue

$$w_{-1}(t) = te^{-t}\delta_{-1}(t).$$

iii) Per quanto concerne la risposta in frequenza, il modulo di $W(j\omega)$ vale

$$|W(j\omega)| = \frac{|ji\omega|}{|(1+j\omega)^2|} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

e si vede facilmente (basta derivare rispetto ad ω ed imporre che tale derivata sia nulla) che esso assume valore massimo per $\omega = 1 = \omega_r$, dove vale $|W(j)| = \left|\frac{j}{(1+j)^2}\right| = \frac{1}{2}$, mentre lo sfasamento è nullo.