

Modellistica e controllo dei motori in corrente continua

Note per le lezioni del corso di

“Controlli Automatici” - A.A. 2008/09

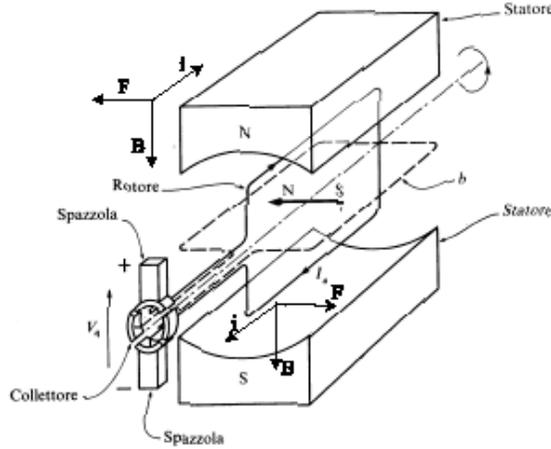
Prof.ssa Maria Elena Valcher

1 Modellistica

Un motore in corrente continua si comporta come un convertitore tensione-coppia, ovvero converte una grandezza elettrica in una meccanica, generando movimento (ad una parte meccanica in rotazione ad esso collegato). Il motore in corrente continua consta di una parte esterna fissa, detta **statore**, realizzata in ferro omogeneo e sulla quale sono presenti due magneti. Tali magneti possono essere permanenti oppure realizzati attraverso degli avvolgimenti percorsi da corrente. Nel caso di motori di piccole dimensioni la scelta cade obbligatoriamente sulla prima soluzione.

All'interno dello statore c'è il **rotore**. Tale rotore, realizzato in ferro laminato, ha cavità attraverso cui vengono fatti passare gli avvolgimenti, attraversati da corrente elettrica. Tale corrente viene detta **corrente d'armatura** e viene imposta attraverso una **tensione d'armatura**. Il rotore ruota attorno ad un albero (**albero motore**) per effetto della forza (di Lorenz) che si genera quando la corrente attraversa gli avvolgimenti del rotore sotto l'azione del campo magnetico esterno.

Chiaramente, se il campo magnetico esterno non varia e il segno della corrente viene invertito, anche il verso della rotazione viene invertito e conseguentemente il segno della coppia generata per effetto della rotazione.



Per determinare le equazioni descrittive della dinamica del motore introduciamo preliminarmente alcuni simboli. Indichiamo con $T(t)$ la coppia fornita dal motore per effetto della forza di Lorenz indotta; $T_c(t)$ rappresenta la coppia di carico, dovuta al fatto che in generale il motore viene utilizzato per far ruotare una parte meccanica esterna; $i_a(t)$ e $v_a(t)$ rappresentano, rispettivamente, la corrente e la tensione d'armatura che interessano gli avvolgimenti del rotore; $e(t)$ è la forza elettromotrice indotta (a cui ci si riferisce, di norma, con il nome di **forza contro elettromotrice**, dal momento che essa agisce in contrapposizione alla tensione $v_a(t)$). Infine, $\theta_m(t)$ rappresenta la posizione angolare dell'albero motore rispetto ad un riferimento esterno fissato. Valgono le seguenti relazioni fondamentali

$$T(t) = K_t i_a(t), \quad (1)$$

$$e(t) = K_e \frac{d\theta_m(t)}{dt}. \quad (2)$$

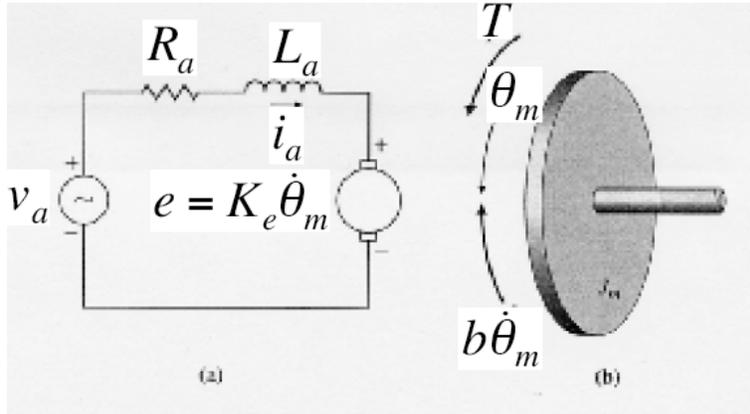
Si noti che l'equazione (2) formalizza l'ipotesi di circuito magnetico lineare. Scegliendo opportunamente le unità di misura, inoltre, è sempre possibile far sì che le costanti K_t e K_e coincidano.

La descrizione del movimento rotatorio del rotore è facilmente derivabile attraverso la seconda legge di Newton e porta a

$$J_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = T(t) - T_c(t) - b \frac{d\theta_m(t)}{dt}, \quad (3)$$

dove J_m rappresenta il momento di inerzia del rotore e b il coefficiente di attrito viscoso.

La descrizione della parte elettrica del rotore, invece, in cui sono coinvolte tensione d'armatura, corrente d'armatura e forza contro elettromotrice, richiede l'introduzione del circuito equivalente illustrato qui di seguito:



Questa descrizione consegue dall'ipotesi che il rotore abbia una sola terminazione polare caratterizzata da un'induttanza L_a associata al relativo avvolgimento e da una resistenza R_a legata alle dispersioni del circuito elettrico. Si giunge in tal modo alla seguente equazione:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t). \quad (4)$$

Sostituendo le (1) ed (2) rispettivamente in (3) e (4), si perviene a:

$$J_m \frac{d^2 \theta_m(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_t i_a(t) - T_c(t), \quad (5)$$

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_e \frac{d\theta_m(t)}{dt}. \quad (6)$$

Applicando ora le trasformate di Laplace a entrambe le precedenti equazioni si ottiene:

$$(J_m s^2 + bs)\Theta_m(s) + T_c(s) = K_t I_a(s), \quad (7)$$

$$V_a(s) = (R_a + sL_a)I_a(s) + K_e s\Theta_m(s). \quad (8)$$

Dalla prima si ottiene l'espressione di $I_a(s)$ che può essere sostituita nella seconda, ottenendo in tal modo:

$$I_a(s) = \frac{(J_m s^2 + bs)}{K_t} \Theta_m(s) + \frac{1}{K_t} T_c(s), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_a(s) &= (R_a + sL_a) \left[\frac{(J_m s^2 + bs)}{K_t} \Theta_m(s) + \frac{1}{K_t} T_c(s) \right] + K_e s \Theta_m(s) \\ &= \left[(R_a + sL_a) \frac{(J_m s^2 + bs)}{K_t} + K_e s \right] \Theta_m(s) + \frac{(R_a + sL_a)}{K_t} T_c(s). \end{aligned} \quad (10)$$

La (10) porta, quindi, a

$$\Theta_m(s) = \frac{1}{(R_a + sL_a) \frac{(J_m s^2 + bs)}{K_t} + K_e s} V_a(s) - \frac{(R_a + sL_a)}{K_t \left[(R_a + sL_a) \frac{(J_m s^2 + bs)}{K_t} + K_e s \right]} T_c(s)$$

$$= \frac{K_t}{J_m L_a s^3 + (J_m R_a + b L_a) s^2 + (b R_a + K_e K_t) s} V_a(s) \quad (11)$$

$$- \frac{(R_a + s L_a)}{J_m L_a s^3 + (J_m R_a + b L_a) s^2 + (b R_a + K_e K_t) s} T_c(s). \quad (12)$$

Si noti, quindi, che $\theta_m(t)$ è interpretabile come uscita in corrispondenza a due ingressi: la tensione d'armatura e la coppia di carico. Chiaramente se il motore viene lasciato libero di ruotare senza carico, $T_c(t) = 0$ e quindi abbiamo a che fare con un sistema SISO. In molti casi l'effetto dell'induttanza è trascurabile rispetto al moto della parte meccanica e per questo, per semplicità, si assume $L_a \approx 0$. In tal caso la precedente relazione diventa:

$$\Theta_m(s) = \frac{K_t}{J_m R_a s^2 + (b R_a + K_e K_t) s} V_a(s) - \frac{R_a}{J_m R_a s^2 + (b R_a + K_e K_t) s} T_c(s). \quad (13)$$

Si noti che in questo caso, dall'esame dei coefficienti del polinomio al denominatore, risulta evidente come l'effetto dell'attrito e quello della forza contro elettromotrice si confondano.

Infine, è spesso consuetudine assumere come variabile da controllare, e quindi come uscita, non la posizione angolare del motore bensì la sua velocità angolare di rotazione $\omega(t) := \frac{d\theta_m(t)}{dt}$. Sapendo che $\Omega(s) = s\Theta_m(s)$, è immediato ricavare nel caso generale

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \frac{K_t}{J_m L_a s^2 + (J_m R_a + b L_a) s + (b R_a + K_e K_t)} V_a(s) \\ &- \frac{(R_a + s L_a)}{J_m L_a s^2 + (J_m R_a + b L_a) s + (b R_a + K_e K_t)} T_c(s), \end{aligned} \quad (14)$$

e nel caso di $L_a \approx 0$

$$\Omega(s) = \frac{K_t}{J_m R_a s + (b R_a + K_e K_t)} V_a(s) - \frac{R_a}{J_m R_a s + (b R_a + K_e K_t)} T_c(s). \quad (15)$$

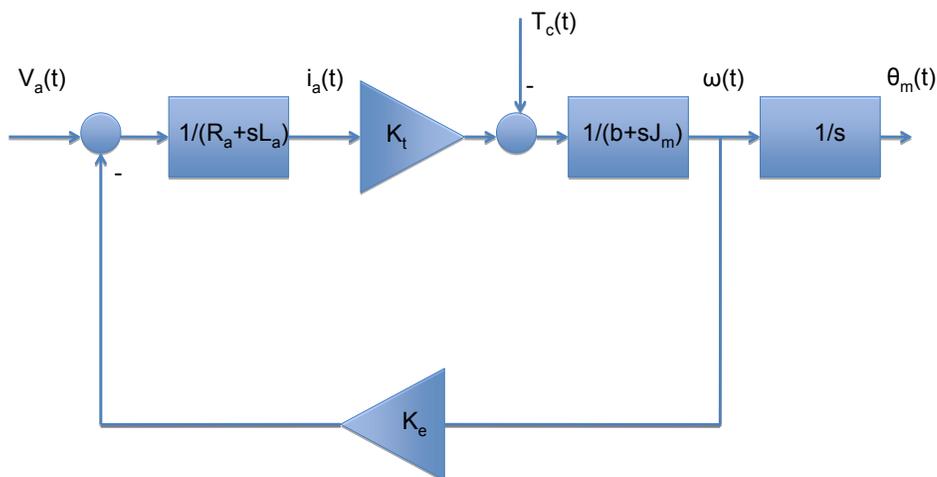
2 Schema a blocchi equivalente del funzionamento del motore in corrente continua

Mettendo assieme le equazioni (7) e (8) con la relazione $\Omega(s) = s\Theta_m(s)$, otteniamo

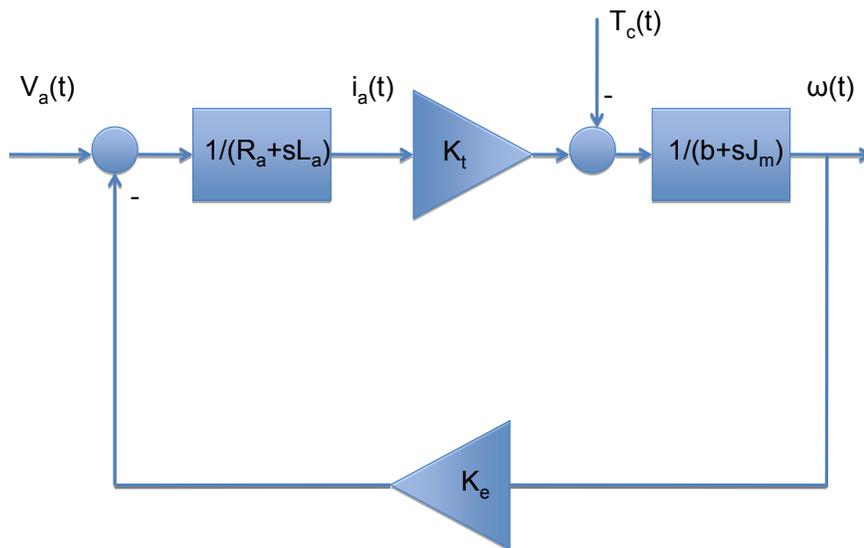
$$\Omega(s) = \frac{1}{(J_m s + b)} [K_t I_a(s) - T_c(s)], \quad (16)$$

$$I_a(s) = \frac{1}{R_a + s L_a} [V_a(s) - K_e \Omega(s)], \quad (17)$$

da cui segue immediatamente lo schema a blocchi:



Si noti che il motore in corrente continua ha intrinsecamente un anello di retroazione interno, tuttavia ai fini del controllo lo schema sopra riportato è quello in catena aperta su cui non è stata effettuata ancora alcuna azione di controllo. Chiaramente se siamo interessati unicamente alla velocità angolare dell'albero motore lo schema può essere "accorciato" nel seguente modo.



3 Controllo di velocità del motore in corrente continua

Come già anticipato, la strategia di controllo più comune per il motore in corrente continua è quella che tende a imporre la velocità (ad esempio ad un valore costante desiderato ω^*) operando sulla tensione d'armatura $v_a(t)$. Per analizzare in maniera più semplice il

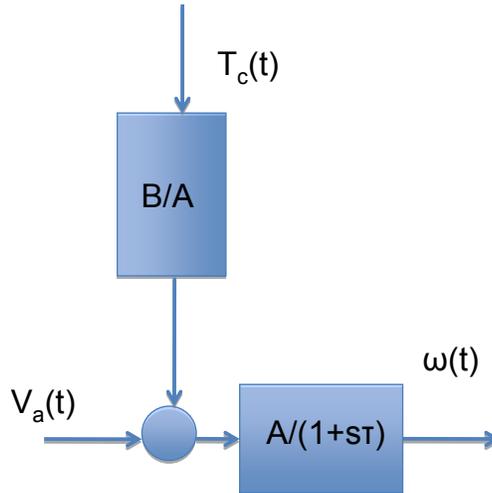
problema, riprendiamo in mano la descrizione del motore, visto come processo in catena aperta, quale è stata fornita dall'espressione (15), in cui abbiamo assunto $L_a \approx 0$, e poniamo

$$\begin{aligned} A &= \frac{K_t}{bR_a + K_e K_t} > 0 \\ B &= -\frac{R_a}{bR_a + K_e K_t} < 0 \\ \tau &= \frac{J_m R_a}{bR_a + K_e K_t} > 0, \end{aligned}$$

ottenendo in tal modo

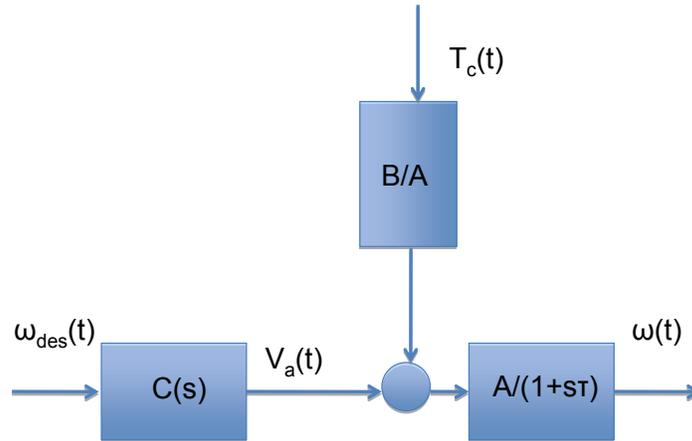
$$\Omega(s) = \frac{A}{1 + s\tau} V_a(s) + \frac{B}{1 + s\tau} T_c(s). \quad (18)$$

Lo schema a blocchi corrispondente al motore può essere pensato quindi, per semplicità, del tipo



3.1 Controllo in catena aperta

Supponiamo, in prima istanza, di voler risolvere il problema di regolazione della velocità del motore ad un valore desiderato ω^* , attraverso un controllore in catena aperta. Ciò equivale a progettare il sistema $C(s)$ nel seguente schema a blocchi in modo tale che il valore di regime della velocità angolare $\omega(t)$ coincida con ω^* .



Poiché vale

$$\Omega(s) = \frac{A}{1+s\tau}C(s)\Omega_{des}(s) + \frac{B}{1+s\tau}T_c(s),$$

nell'ipotesi in cui $C(s)$ sia BIBO stabile e $T_c(t)$ sia costante e pari a T_c^* , allora, utilizzando l'analisi di regime permanente (si noti che il sistema è BIBO stabile rispetto a ciascuno dei due ingressi: $\omega_{des}(t)$ e $T_c(t)$) e la sovrapposizione degli effetti, possiamo dire che al limite per t tendente a $+\infty$, ovvero a regime,

$$\omega(t) \approx AC(0)\omega^* + BT_c^*.$$

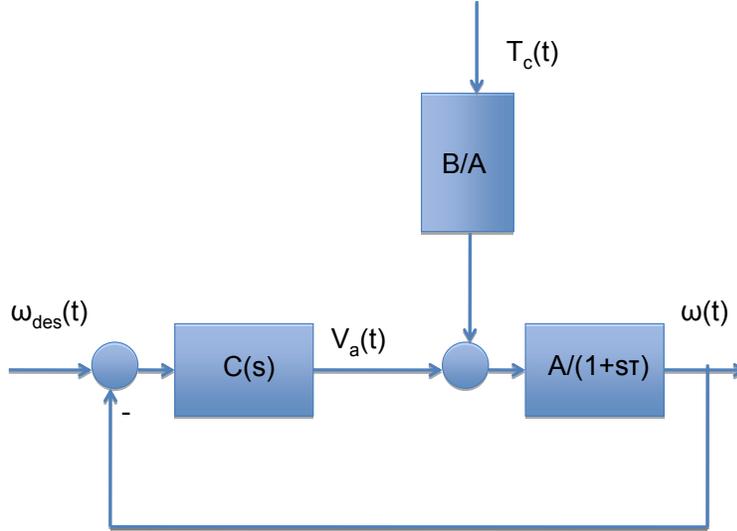
Ciò evidenzia chiaramente come solo nel caso in cui conosciamo esattamente il valore della coppia di carico possiamo selezionare il controllore $C(s)$ (in realtà ai fini del problema di regolazione ha interesse solo il suo valore in 0 e pertanto non c'è perdita di generalità nel supporre che si tratti di un controllore puramente proporzionale $C(s) = K_p$) in modo tale che a regime $\omega(t)$ eguagli ω^* , ma questa soluzione è chiaramente poco robusta e insoddisfacente. In generale, quindi, abbiamo un errore di regolazione la cui entità non è prevedibile a priori (sistema di tipo 0 con errore di regime permanente non limitabile a priori). Si noti che se la coppia di carico non è costante, non è nemmeno possibile sperare di avere velocità costante a regime.

Passiamo allora ad esaminare schemi di controllo alternativi.

3.2 Controllo in catena chiusa

Il controllo di velocità viene di norma realizzato applicando al motore una tensione d'armatura $v_a(t)$ ottenuta per retroazione da $\omega(t)$. Da un punto di vista pratico, ciò è possibile ricorrendo ad un tachimetro che misura la velocità di rotazione dell'albero motore e fornisce in uscita un segnale di tensione proporzionale alla velocità angolare. Tale segnale di tensione viene raffrontato con un altro segnale di tensione che rappresenta l'uscita di un

analogo trasduttore al cui ingresso viene applicata la velocità angolare desiderata. Il segnale di errore, poi, va a comandare il controllore al fine di produrre la tensione d'armatura da applicare al motore. Nel seguito ignoreremo tuttavia la presenza di trasduttori e supporremo di poter raffrontare direttamente la velocità angolare effettiva $\omega(t)$ con quella desiderata $\omega_{des}(t)$. Inoltre supporremo ancora una volta di occuparci di problemi di regolazione e di assumere, pertanto, $\omega_{des}(t) = \omega^* \delta_{-1}(t)$. In queste ipotesi lo schema di controllo a cui faremo riferimento sarà il seguente.



3.2.1 Controllo di tipo P

Supponiamo di voler risolvere un problema di regolazione della velocità del motore ad un valore desiderato ω^* , attraverso una tensione d'armatura ottenuta con una legge in retroazione di tipo puramente proporzionale:

$$v_a(t) = K_p[\omega_{des}(t) - \omega(t)],$$

ovvero

$$V_a(s) = K_p[\Omega_{des}(s) - \Omega(s)].$$

Da (18) si ottiene

$$\Omega(s) = \frac{A}{1 + s\tau} K_p[\Omega_{des}(s) - \Omega(s)] + \frac{B}{1 + s\tau} T_c(s),$$

da cui segue

$$\Omega(s) = \frac{K_p A}{K_p A + 1 + s\tau} \Omega_{des}(s) + \frac{B}{K_p A + 1 + s\tau} T_c(s). \quad (19)$$

Se ipotizziamo che $T_c(t)$ sia costante e pari a T_c^* , allora, utilizzando l'analisi di regime permanente (si noti che anche in questo caso il sistema è BIBO stabile rispetto a ciascuno

dei due ingressi) e la sovrapposizione degli effetti, possiamo dire che al limite per t tendente a $+\infty$, ovvero a regime,

$$\omega(t) \approx \frac{K_p A}{K_p A + 1} \omega^* + \frac{B}{K_p A + 1} T_c^*.$$

Pertanto, se il nostro obiettivo è quello di far sì che $\omega(t)$ a regime valga approssimativamente ω^* (senza aver la possibilità di scegliere liberamente la tensione di carico) è necessario che $K_p A \gg 1$ e $K_p A \gg B$. In tali ipotesi $\omega(t) \approx \omega^*$. Ancora una volta il valore a regime, tranne nel caso di particolari valori di T_c^* , sarà diverso da ω^* e quindi ci sarà un errore di inseguimento del segnale a gradino (sistema di tipo 0), tuttavia in questo caso possiamo considerarlo sempre piccolo e quindi si tratta di un significativo miglioramento rispetto al caso precedente.

3.2.2 Controllo di tipo PI

Supponiamo, ora, di voler risolvere il problema di regolazione della velocità del motore al valore ω^* , attraverso una tensione d'armatura ottenuta con una legge in retroazione di tipo proporzionale e integrale:

$$V_a(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) [\Omega_{des}(s) - \Omega(s)].$$

Da (18) si ottiene

$$\Omega(s) = \frac{A(K_p s + K_i)}{s(1 + s\tau)} [\Omega_{des}(s) - \Omega(s)] + \frac{B}{1 + s\tau} T_c(s),$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \Omega(s) &= \frac{A(K_p s + K_i)}{A(K_p s + K_i) + s(1 + s\tau)} \Omega_{des}(s) + \frac{Bs}{A(K_p s + K_i) + s(1 + s\tau)} T_c(s) \\ &= \frac{A(K_p s + K_i)}{\tau s^2 + (AK_p + 1)s + AK_i} \Omega_{des}(s) + \frac{Bs}{\tau s^2 + (AK_p + 1)s + AK_i} T_c(s) \quad (20) \end{aligned}$$

Se ipotizziamo che $T_c(t)$ sia costante e pari a T_c^* , allora, utilizzando l'analisi di regime permanente (si noti che il sistema è BIBO stabile rispetto a ciascuno dei due ingressi, dal momento che per la regola dei segni di Cartesio il polinomio al denominatore nelle precedenti espressioni è certamente di Hurwitz) e la sovrapposizione degli effetti, possiamo dire che al limite per t tendente a $+\infty$, ovvero a regime,

$$\omega(t) \approx 1 \cdot \omega^* + 0 \cdot T_c^*.$$

Pertanto, in questo caso l'obiettivo di far sì che $\omega(t)$ a regime valga approssimativamente ω^* è sempre conseguibile, indipendentemente dal valore della tensione di carico. Il sistema quindi si comporta (prevedibilmente, in quanto tutto ciò è in perfetto accordo con la teoria sviluppata finora) come un sistema di tipo (almeno) 1 e insegue senza errore di regime permanente il riferimento costante di velocità.