

Modellistica e controllo PID di un pendolo inverso

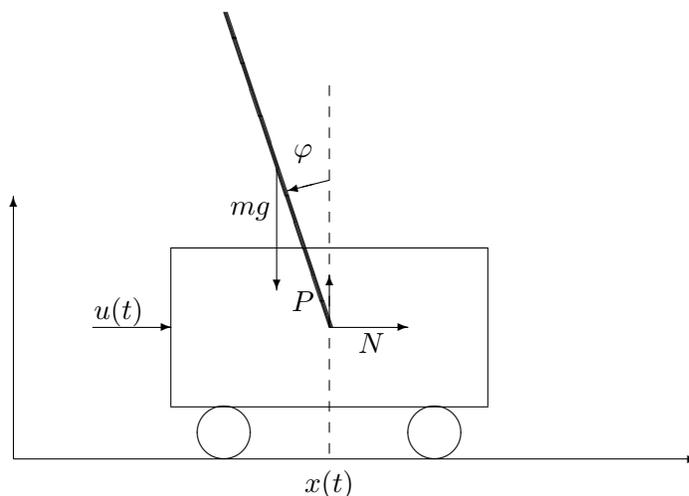
Note per le lezioni del corso di

“Controlli Automatici” - A.A. 2009/10

Prof.ssa Maria Elena Valcher

1 Modellistica

Un'asta di massa m è incernierata ad un carrello di massa M , il cui movimento è comandato da una forza $u(t)$. La posizione del centro di massa del carrellino al tempo t è $x(t)$. Il sistema meccanico complessivo è descritto nella seguente figura



Le equazioni del sistema sono quelle di bilanciamento delle componenti orizzontali e verticali delle forze agenti. Indichiamo rispettivamente con $P(\cdot)$ e $N(\cdot)$ la forza verticale (parallela alla verticale) e quella orizzontale (normale alla verticale) esercitate dal carrello sull'asta, con L la distanza del baricentro dell'asta dalla cerniera e con I il momento di inerzia dell'asta rispetto al baricentro. Sia inoltre g l'accelerazione di gravità.

Il moto del baricentro dell'asta è descritto dalle equazioni

$$N(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) \quad (1)$$

$$P(t) - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi(t)) \quad (2)$$

e il moto di rotazione relativo al baricentro da

$$LP(t) \sin \varphi(t) + LN(t) \cos \varphi(t) = I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}. \quad (3)$$

Il moto del carrello è descritto dalla equazione

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -N(t) + u(t) - b \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

dove si è tenuto conto della presenza di un attrito viscoso di coefficiente b . Sostituendo le espressioni di $P(t)$ e $N(t)$, quali si ricavano dalle equazioni (1) e (2), in (3) e (4), si perviene alla coppia di equazioni:

$$L \left[m \frac{d^2}{dt^2} (L \cos \varphi(t)) + mg \right] \sin \varphi(t) + L \left[m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) \right] \cos \varphi(t) = I \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \quad (5)$$

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -m \frac{d^2}{dt^2} (x(t) - L \sin \varphi(t)) + u(t) - b \frac{dx(t)}{dt}. \quad (6)$$

Assumendo $\varphi(t)$ molto piccolo, così che valgano le approssimazioni

$$\sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t), \quad \cos(\varphi(t)) \approx 1,$$

le (5) e (6) possono essere riscritte come segue:

$$(I + mL^2) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - Lmg\varphi(t) = Lm \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \quad (7)$$

$$(M + m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - mL \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + b \frac{dx(t)}{dt} = u(t). \quad (8)$$

Se ora applichiamo la trasformata di Laplace a (7) e (8), troviamo

$$[(I + mL^2) s^2 - Lmg] \Phi(s) = Lms^2 X(s), \quad (9)$$

$$(M + m)s^2 X(s) - mLs^2 \Phi(s) + bsX(s) = U(s). \quad (10)$$

Dalla prima si ricava

$$X(s) = \frac{(I + mL^2) s^2 - Lmg}{Lms^2} \Phi(s)$$

che, sostituita nella seconda, porta a

$$[(M + m)s + b] s \left(\frac{(I + mL^2) s^2 - Lmg}{Lms^2} \Phi(s) \right) - mLs^2 \Phi(s) = U(s),$$

ovvero

$$\left(\frac{[(M + m)s + b][(I + mL^2) s^2 - Lmg]}{Lms} - mLs^2 \right) \Phi(s) = U(s).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} G(s) &:= \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{Lms}{[(M + m)s + b][(I + mL^2) s^2 - Lmg] - m^2 L^2 s^3} \\ &= \frac{Lms}{[(M + m)(I + mL^2) - m^2 L^2] s^3 + b(I + mL^2) s^2 - mgL(M + m)s - mgLb}. \end{aligned}$$

Consideriamo il polinomio

$$p(s) = [(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2]s^3 + b(I + mL^2)s^2 - mgL(M + m)s - mgLb$$

che compare al denominatore (in una rappresentazione ovviamente coprima) della precedente funzione di trasferimento. L'applicazione della tabella di Routh a tale polinomio porta al seguente risultato

$$\begin{array}{c|cc} 3 & [(M + m)(I + mL^2) - m^2L^2] & -mgL(M + m) \\ 2 & b(I + mL^2) & -mgLb \\ 1 & -\frac{m^3L^3gb}{b(I + mL^2)} & 0 \\ 0 & -mgLb & 0 \end{array}$$

e ciò evidenzia la presenza di una variazione e due permanenze (qualunque siano i valori dei parametri in gioco, che comunque sono vincolati ad essere positivi). Pertanto $p(s)$ ha due radici a parte reale negativa ed una radice reale positiva. Ciò assicura che $G(s)$ abbia uno zero nell'origine, due poli a parte reale negativa ed un polo reale positivo. Di conseguenza, $G(s)$ non è mai BIBO stabile. Risultato piuttosto prevedibile dall'esperienza diretta del sistema fisico in esame.

Se assumiamo per le grandezze in gioco i seguenti valori:

- $M = 0.5$ kg;
- $m = 0.2$ kg;
- $b = 0.1$ N/m/sec;
- $L = 0.3$ m;
- $g = 9.9$ m/s²;
- $I = 0.006$ kg·m²,

ne consegue che la funzione di trasferimento del pendolo risulta

$$G(s) = \frac{4.545 s}{s^3 + 0.1818s^2 - 31.18s - 4.455}.$$

Dal punto di vista dei comandi Matlab, una volta inseriti i valori dei parametri fisici del sistema (eventualmente tramite un file Dati.m da aprire preliminarmente) e definiti

i vettori rappresentativi dei polinomi al numeratore e al denominatore nella precedente rappresentazione:

$$\begin{aligned} \text{num} &= [L * m / q \quad 0] \\ \text{den} &= [1 \quad b * (I + m * L \wedge 2) / q \quad -(M + m) * L * m * g / q \quad -L * m * g * b / q] \end{aligned}$$

si ottiene la funzione di trasferimento del pendolo attraverso il comando

$$\text{pend} = \text{tf}(\text{num}, \text{den})$$

e si ricava in tal modo l'espressione numerica sopra riportata. Come già evidenziato, la rappresentazione data per $G(s)$ è coprima e il polinomio al denominatore non è di Hurwitz. Il comando `root(den)` restituisce la terna di radici del polinomio al denominatore e quindi i poli di $G(s)$. Si trova, quindi, in questo caso numerico specifico (in conformità a quanto previsto dal criterio di Routh):

$$5.5651 \quad -5.6041 \quad -0.1428.$$

Con i comandi

$$\begin{aligned} t &= 0 : 0.01 : 5 \\ \text{impulse}(\text{pend}, t) \\ \text{stepplot}(\text{pend}, t), \end{aligned}$$

possiamo visualizzare la risposta impulsiva e la risposta al gradino del sistema pendolo inverso (nell'intervallo da 0 a 5 secondi, con una campionatura fatta ogni 0.01 secondi). Da tali diagrammi risulta evidente l'instabilità del sistema.

2 Problema di controllo e sua soluzione

In base alla specifica scelta dei parametri fisici da noi effettuata, la funzione di trasferimento $G(s)$ può essere riscritta in forma di Bode nel seguente modo

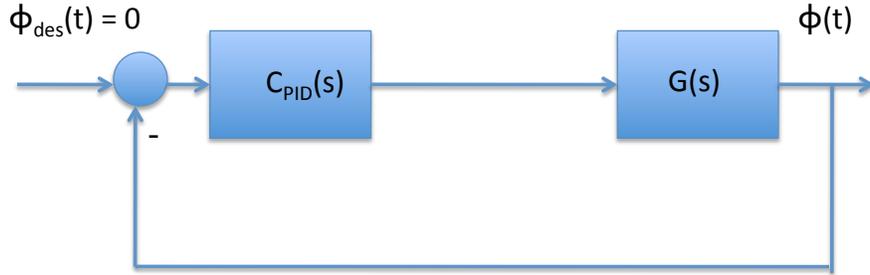
$$G(s) = K_B(G) \frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 - sT_3)},$$

dove T_1, T_2 e T_3 sono parametri reali positivi¹, mentre il guadagno di Bode $K_B(G)$ risulta negativo. Come primo obiettivo, vogliamo progettare un controllore PID, e quindi di funzione di trasferimento

$$C_{PID}(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s},$$

¹In conseguenza della scelta dei parametri fisici prima adottata, la funzione ha tre poli reali distinti. Il caso in cui $G(s)$ presentasse due poli reali complessi coniugati a parte reale negativa potrebbe essere trattato in modo analogo.

in modo tale che il sistema retroazionato illustrato nella seguente figura, e avente $\varphi_{\text{des}}(t)$ come ingresso di riferimento e $\varphi(t)$ come uscita, sia BIBO stabile.



Notando che il controllore PID può essere riscritto nella forma

$$C_{PID}(s) = K_i \frac{\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1}{s},$$

osserviamo che se assumiamo

$$\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1 = (1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

otteniamo come funzione di trasferimento in catena aperta

$$\tilde{G}(s) := C_{PID}(s)G(s) = K_B(G)K_i \frac{1}{1 - sT_3}.$$

Tale funzione di trasferimento presenta un solo polo reale positivo, ovvero $n_{G^+} = 1$, se assumiamo $K_i > 0$ e tale che $|K_B(G)K_i| > 1$, il diagramma di Nyquist di $\tilde{G}(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, è una curva chiusa che compie un giro in verso antiorario attorno al punto $-1 + j0$. Essendo $n_{G^+} = 1$, in base al criterio di Nyquist possiamo dire che la funzione di trasferimento $W(s)$ ottenuta per retroazione unitaria negativa da $\tilde{G}(s)$ è certamente BIBO stabile. Infatti, si trova

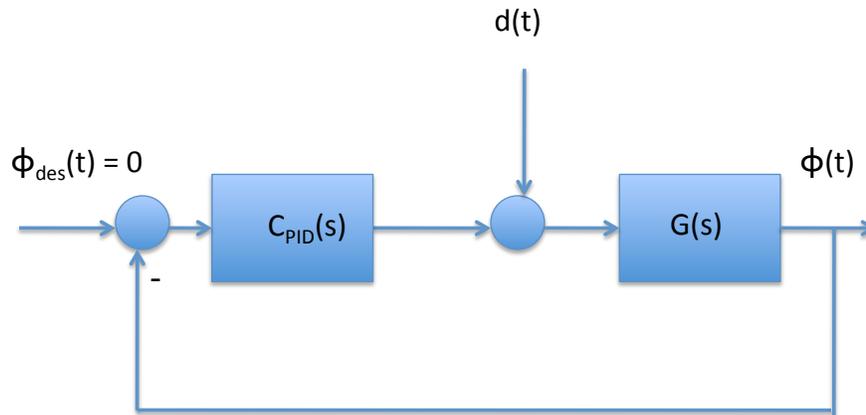
$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} = \frac{K_B(G)K_i \frac{1}{1 - sT_3}}{1 + K_B(G)K_i \frac{1}{1 - sT_3}} = \frac{K_B(G)K_i}{1 + K_B(G)K_i - sT_3} \\ &= \frac{K_B(G)K_i}{1 + K_B(G)K_i} \frac{1}{1 + s \frac{-T_3}{1 + K_B(G)K_i}}, \end{aligned}$$

con

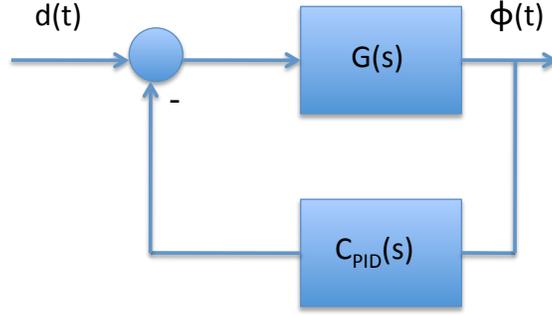
$$\frac{-T_3}{1 + K_B(G)K_i} > 0.$$

Va, inoltre, osservato che scegliendo $K_i > 0$ e tale che $|K_B(G)K_i| \gg 1$ assicuriamo che il sistema retroazionato, certamente di tipo 0, dal momento che $\tilde{G}(s)$ non presenta poli nell'origine, presenti comunque un errore di regime permanente al gradino $e_{rp}^{(1)}$ molto piccolo, tanto più prossimo a zero quanto più grande è $|K_B(G)K_i|$. Inoltre, in tal modo, l'unico polo (reale negativo) di $W(s)$ diventa estremamente grande, assicurando al sistema retroazionato una banda passante grande e quindi piccoli tempi di salita nella risposta al gradino. Va tuttavia evidenziato come tra controllore PID e funzione di trasferimento $G(s)$ abbia avuto luogo una cancellazione zero/polo nell'origine, cancellazione che avevamo evidenziato come potesse portare a potenziali problemi. Su questo aspetto torneremo tra breve.

Consideriamo ora una variazione al classico problema di controllo prima esaminato per il sistema carrello-pendolo inverso. Di norma l'obiettivo di regolazione di tale sistema è quello di far sì che $\varphi(t)$ sia nullo, ovvero il pendolo sia in equilibrio verticale. In assenza di forze applicate sul sistema e con carrello fermo il pendolo può trovarsi in equilibrio verticale. Supponiamo ora che al precedente sistema, controllato con un controllore PID, venga applicato (a partire dall'istante $t = 0$) un disturbo costante $d(t)$ che si manifesta come una forza aggiuntiva rispetto alla forza generata dal controllore PID. Supponiamo inoltre, per semplicità, che le condizioni iniziali sia del controllore PID che del sistema carrello con pendolo inverso siano tutte nulle. Lo schema di controllo che abbiamo in mente è il seguente:



Tuttavia, in virtù del fatto che il segnale di riferimento è nullo, il precedente schema (a due ingressi, $\varphi_{des}(t)$ e $u(t)$, ed un'uscita, $\varphi(t)$) è del tutto equivalente al seguente schema ad un solo ingresso ed una sola uscita:



Da questo schema è immediato dedurre che la funzione di trasferimento dal disturbo $d(t)$ alla posizione angolare $\varphi(t)$ è data da

$$\begin{aligned} W_d(s) &= \frac{\Phi(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)C_{PID}(s)} = \frac{K_B(G) \frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 - sT_3)}}{1 + K_B(G)K_i \frac{1}{1 - sT_3}} \\ &= \frac{K_B(G)s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + K_B(G)K_i - sT_3)} \\ &= \frac{K_B(G)}{1 + K_B(G)K_i} \frac{s}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \left(1 + s \frac{-T_3}{1 + K_B(G)K_i}\right)} \end{aligned}$$

e si tratta quindi ancora di un funzione BIBO stabile. È immediato quindi rendersi conto del fatto che, in condizioni di pura evoluzione forzata, un disturbo a gradino $d(t) = d_0\delta_{-1}(t)$ a regime porta in uscita ad un segnale pari a $W_d(0)d_0 = 0$. Ciò equivale a dire che il nostro schema di controllo è robusto all'effetto di eventuali disturbi costanti applicati al carrellino, nel senso che se al segnale di controllo $u(t)$ generato dal controllore PID si sovrappone un disturbo costante $d(t)$, l'obiettivo di portare il pendolo inverso in posizione verticale viene comunque conseguito. È tuttavia evidente che la presenza di una forza applicata costante (somma in realtà del disturbo e di una componente costante fornita dal PID, in quanto l'azione integrale può continuare a fornire un contributo costante sebbene $e(t) = \varphi_{des}(t) - \varphi(t)$ sia andato a zero) porterà il carrellino a muoversi con velocità costante (per effetto dell'attrito). Quindi in presenza di un disturbo costante il sistema è ancora in grado di controllare la posizione angolare ma al prezzo di un carrellino che

continua a muoversi soggetto ad una forza costante. Questo problema è legato proprio alla cancellazione zero/polo nell'origine. Infatti il fattore s al numeratore di $G(s)$ fa sì che un ingresso costante ma non nullo (ovvero la forza totale applicata) sia compatibile con un'uscita a regime nulla. Infatti la variabile d'uscita che stiamo prendendo in esame è solo la posizione angolare dell'asta, mentre la posizione del carrellino non viene presa in esame ed essa può rimanere non nulla, come accade, ad esempio, nel caso di un disturbo costante. Si può dimostrare che lo stesso fenomeno (posizione angolare nulla, ma velocità del carrellino costante e non nulla) può verificarsi anche in assenza di disturbo esterno, qualora le condizioni iniziali sul sistema carrellino con pendolo inverso e/o sul controllore PID non siano nulle.

Infine ci chiediamo cosa succederebbe se evitassimo la cancellazione zero/polo nell'origine sostituendo in $C_{PID}(s)$ l'azione integrale $\frac{K_i}{s}$ con un'azione quasi-integrale $\frac{K_i}{s+\epsilon}$. In tal caso il controllore PID diventerebbe

$$C_{PID}(s) = K_i \frac{\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1}{s + \epsilon},$$

e assumendo, ancora una volta,

$$\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1 = (1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

otterremmo come funzione di trasferimento in catena aperta

$$\tilde{G}(s) := C_{PID}(s)G(s) = K_B(G)K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}.$$

La corrispondente funzione di trasferimento in catena chiusa risulterebbe allora

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)} = \frac{K_B(G)K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}}{1 + K_B(G)K_i \frac{s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon)}} = \frac{K_B(G)K_i s}{(1 - sT_3)(s + \epsilon) + K_B(G)K_i s} \\ &= \frac{K_B(G)K_i s}{\epsilon + (K_B(G)K_i + 1 - \epsilon T_3)s - T_3 s^2}. \end{aligned}$$

Assumendo ancora una volta $K_i > 0$ e tale che $|K_B(G)K_i| \gg 1$, l'unico modo perchè il polinomio al denominatore abbia tutti i coefficienti di ugual segno (negativo), assicurando quindi, per Cartesio, la stabilità BIBO del sistema, è che ϵ risulti negativo, ma ciò equivale a richiedere che il controllore quasi-PID abbia un polo reale positivo e quindi non sia BIBO stabile. Di essa è possibile dare un'interpretazione in termini di diagrammi di Nyquist. Se infatti la cancellazione nell'origine non ha luogo, la funzione di trasferimento $\tilde{G}(s)$ ha un diagramma di Nyquist che parte nell'origine per $\omega = 0^+$ e torna nell'origine per $\omega \rightarrow +\infty$, in virtù del fatto che $\tilde{G}(s)$ è strettamente propria. Quindi qualunque sia il numero di giri che il diagramma di Nyquist di $\tilde{G}(j\omega)$ fa attorno al punto critico $-1 + j0$ per ω che va da 0^+ a $+\infty$, il diagramma di Nyquist completo ne fa certamente il doppio e quindi un numero N pari. Ne consegue che condizione necessaria affinché $W(s)$ sia BIBO stabile (ovvero

$n_{W+} = 0$) è che n_{G+} sia pari. Pertanto al polo instabile del sistema carrellino con pendolo inverso se ne deve affiancare un altro instabile dovuto al controllore. Specificatamente, per $\epsilon < 0$ si trova $n_{G+} = 2$, e $N = 2$, da cui la stabilità BIBO.

Anche in questa situazione, se le condizioni iniziali sono nulle e un disturbo costante agisce sul carrellino, non siamo in grado di assicurare che la velocità a regime sia nulla, tuttavia si può dimostrare che scegliendo ϵ piccolo a piacere possiamo rendere la velocità del carrellino a regime arbitrariamente piccola. In generale, la presenza di uno zero nell'origine per la $G(s)$ fa sì che qualunque sia il controllore adottato non siamo in grado di assicurare che l'ingresso di $G(s)$ a regime sia nullo.