

# Decimo test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Si studi osservabilità e ricostruibilità dei sistemi a tempo discreto descritti dalle seguenti coppie di matrici:

$$(a) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \quad 1 \quad 0];$$

$$(b) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \quad 0 \quad 1];$$

$$(c) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Si consideri il seguente modello di stato a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [a \quad a-1 \quad 0]. \end{aligned}$$

- i) Si studi, al variare del parametro  $a$  in  $\mathbb{R}$ , l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema.
- ii) Per  $a = 0$  si determini, se possibile, una parametrizzazione completa dei possibili stimatori dead-beat per il sistema e tra di essi uno con indice di nilpotenza minimo.
- iii) Per  $a = 0$  si progetti, se possibile, un regolatore dead-beat per il sistema che faccia uso dello stimatore dead-beat minimo determinato al punto ii).

3. Si consideri il seguente modello di stato a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \quad 1 \quad 0]. \end{aligned}$$

- i) Si determini, se possibile, un controllo in retroazione che renda il risultante sistema asintoticamente stabile e osservabile.
- ii) Si determini, se possibile, uno stimatore asintotico per il sistema.

4. Si consideri il seguente modello di stato a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \quad 1 \quad 0]. \end{aligned}$$

- i) Si determini, se possibile, uno stimatore dead-beat per il sistema.
- ii) Si determini, se possibile, una parametrizzazione completa dei possibili stimatori dead-beat per il sistema e tra di essi uno con indice di nilpotenza minimo.
- iii) Si progetti, se possibile, un regolatore dead-beat per il sistema che faccia uso dello stimatore dead-beat minimo determinato al punto ii).

5. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

- i) Progettare, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato a partire dalla sola prima uscita.
- ii) Progettare, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato in modo tale che l'errore di stima sia combinazione lineare dei soli modi  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ .
- iii) Progettare, se possibile, un regolatore asintotico per il sistema dato.

## RISPOSTE

1. Osservabilità e ricostruibilità dei sistemi a tempo discreto:

(a) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha rango 2, pertanto il sistema non è osservabile. Andiamo ora a valutare la condizione equivalente alla ricostruibilità ovvero andiamo a vedere se

$$\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O}.$$

In questo caso si trova

$$\ker F^3 = \ker \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

che chiaramente coincide con  $\ker \mathcal{O}$ . Pertanto il sistema è ricostruibile.

(b) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha rango 3, pertanto il sistema è osservabile e quindi, a maggior ragione, ricostruibile.

(c) La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/4 & 0 \end{bmatrix},$$

ed ha rango 2, pertanto il sistema non è osservabile. Andiamo ora a valutare la condizione equivalente alla ricostruibilità ovvero andiamo a vedere se

$$\ker F^n \supseteq \ker \mathcal{O}.$$

In questo caso si trova che poichè  $F$  è non singolare anche  $F^3$  lo è e quindi

$$\ker F^3 = \{0\}$$

che chiaramente non può contenere  $\ker \mathcal{O}$  che è non banale. Pertanto il sistema non è nemmeno ricostruibile.

2. i) La matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-1 & 0 \\ 0 & a & a-1 \\ 0 & 1-a & a \end{bmatrix}$$

e il suo determinante è pari a  $\det \mathcal{O} = a(2a^2 - 2a + 1)$ . Poichè l'unico zero reale di questo polinomio è  $a = 0$ , il sistema risulta osservabile e quindi raggiungibile per ogni valore di  $a \neq 0$ . Per  $a = 0$  la matrice di raggiungibilità ha rango 2 e pertanto la matrice  $F_{22}$  del sottosistema non osservabile ha dimensione unitaria. Si tratta allora di valutare attraverso il criterio PBH di osservabilità qual è l'autovalore non osservabile. Si trova facilmente, essendo  $F$  in forma compagna, che

$$\Delta_F(z) = z^3 + z = z(z^2 + 1)$$

e quindi  $\sigma(F) = (0, j, -j)$ . Se la matrice PBH di osservabilità perde rango in 0 allora, in base alla proposizione relativa alla caratterizzazione degli stimatori dead-beat, possiamo dire che il sistema ammette stimatore dead-beat o, equivalentemente, è ricostruibile. Si trova

$$\text{rank} \left[ \begin{array}{c} zI_3 - F \\ H \end{array} \right] \Big|_{z=0} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto per  $a = 0$  il sistema è ricostruibile senza che sia osservabile.

ii) Per determinare una parametrizzazione completa degli stimatori dead-beat del sistema per  $a = 0$  (stimatori la cui esistenza è stata provata al punto precedente) procediamo attribuendo alla matrice  $L$  una struttura parametrica  $L = [b \ c \ d]^T$  e imponiamo che il polinomio caratteristico di  $F + LH$  sia  $z^3$ . Si trova

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1-b & 0 \\ 0 & -c & 1 \\ 0 & -1-d & 0 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è

$$\Delta_{F+LH}(z) = z[z^2 + cz + (1+d)].$$

Pertanto gli stimatori dead-beat sono tutti e soli quelli del tipo

$$L = [b \ 0 \ -1].$$

Per determinare quello di indice minimo è sufficiente valutare

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede subito che l'indice di nilpotenza unitario non è ottenibile mentre si ha indice di nilpotenza 2 scegliendo  $b = 1$ . Per  $b \neq 1$  l'indice di nilpotenza risulta pari a 3.

iii) Per completare il regolatore è sufficiente costruire un controllore dead-beat. La sua esistenza è assicurata dal fatto che la coppia  $(F, g)$  sia in forma canonica di controllo, ma questo rende immediata anche la valutazione della matrice di retroazione

$$K = [0 \ 1 \ 0].$$

3. i) È immediato verificare che la coppia  $(F, G)$  è raggiungibile, pertanto certamente esiste un controllo in retroazione che rende il risultante sistema retroazionato asintoticamente stabile. Verificheremo poi se è possibile renderlo anche osservabile. Esprimiamo  $K$  in forma parametrica come

$$K = [a \quad b \quad c]$$

e valutiamo la matrice  $F + GK$  i.e.

$$F + GK = \begin{bmatrix} a & 1+b & c \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

e la matrice di osservabilità del sistema retroazionato ovvero

$$\mathcal{O}_K = \begin{bmatrix} H \\ H(F + GK) \\ H(F + GK)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2-a & 3-b & -c \end{bmatrix}.$$

Dal calcolo del determinante emerge chiaramente che il sistema risultante è osservabile se e solo se  $c \neq 0$ . A questo punto è sufficiente imporre alla matrice  $F + GK$  un polinomio a zeri in  $\text{Re}(s) < 0$  e sincerarsi che ciò corrisponda ad una matrice  $K$  la cui terza componente è non nulla. Poichè

$$\Delta_{F+gK}(s) = s^3 - as^2 + (1+b-4)s + (4a-c+2+2b)$$

imponendo

$$\Delta_{F+gK}(s) = (s+1)^3$$

si trova

$$K = [-3 \quad 6 \quad 1]$$

che assicura l'osservabilità del risultante sistema retroazionato.

- ii) Il sistema è in forma standard di osservabilità con matrice  $F_{22}$  del sottosistema non osservabile pari a  $F_{22} = [-2]$ , di conseguenza esiste uno stimatore asintotico. Attribuendo alla matrice  $L$  la struttura

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e scegliendo  $L_1$  in modo tale da attribuire alla matrice  $F_{11} + L_1 H_1$ , con

$$(F_{11}, H_1) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, [0 \quad 1] \right),$$

polinomio caratteristico  $(s+2)^2$  otteniamo

$$L = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. i) Il sistema è in forma standard di osservabilità con matrice  $F_{22}$  del sottosistema non osservabile pari a  $F_{22} = [0]$ , di conseguenza esiste uno stimatore dead-beat. Attribuendo alla matrice  $L$  la struttura

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e scegliendo  $L_1$  in modo tale da attribuire alla matrice  $F_{11} + L_1 H_1$ , con

$$(F_{11}, H_1) = \left( \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, [0 \quad 1] \right),$$

polinomio caratteristico  $z^2$  otteniamo

$$L = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ii) In virtù della forma standard di osservabilità della coppia  $(F, H)$  possiamo facilmente dedurre che gli stimatori dead-beat sono tutti e soli quelli del tipo

$$L = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ c \end{bmatrix}.$$

Per determinare quello di indice minimo è sufficiente valutare

$$F + LH = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c - 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si vede subito che l'indice di nilpotenza unitario non è ottenibile mentre si ha indice di nilpotenza 2 scegliendo  $c = 1$ . Per  $c \neq 1$  l'indice di nilpotenza risulta pari a 3.

iii) Ai fini della progettazione del regolatore dead-beat è sufficiente progettare un controllore dead-beat, in aggiunta allo stimatore dead-beat di indice minimo determinato al punto ii). A tal fine valuto la raggiungibilità della coppia  $(F, G)$ . Si trova

$$\mathcal{R} = [G \quad FG \quad F^2G] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

il cui rango è 2 e pertanto la matrice  $F_{22}$  del sottosistema non raggiungibile ha dimensione unitaria. Si tratta allora di valutare attraverso il criterio PBH di osservabilità qual è l'autovalore non raggiungibile. Si trova

$$\Delta_F(z) = z(z^2 - 3z - 2)$$

e quindi  $0 \in \sigma(F)$ . Se la matrice PBH di raggiungibilità perde rango in 0 allora, in base alla proposizione relativa alla caratterizzazione dei controllori dead-beat, possiamo dire che il sistema ammette controllore dead-beat. Si trova

$$\text{rank} [zI_3 - F \quad G]|_{z=0} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 0 \\ -1 & -3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Pertanto il sistema ammette un controllore dead-beat. Una soluzione “a occhio” è

$$K = [-1 \quad -3 \quad 0].$$

5. i) È immediato rendersi conto del fatto che la coppia  $(F, h_1)$ , dove  $h_1$  rappresenta la prima riga della matrice  $H$ , è una coppia in forma standard di osservabilità, con matrice  $F_{22}$ , del sottosistema non osservabile, data da  $F_{22} = [1]$ . Pertanto, per ogni scelta della matrice  $L_1$  dello stimatore (dalla sola prima uscita), la matrice  $F + L_1 h_1$ , che regola la dinamica dell'errore di stima, avrà 1 come autovalore. Di conseguenza, non esiste uno stimatore asintotico dalla sola prima uscita.

ii) [4 punti] Consideriamo la coppia  $(F, H)$  e la sua versione duale  $(F^T, H^T)$ . La coppia  $(F^T, H^T)$  è raggiungibile, e posso scegliere una matrice  $K$  in modo tale che

$$F^T + H^T K = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ \hline -1 & -2 & \\ \hline & & -1 \end{array} \right],$$

ovvero  $F^T + H^T K$  sia diagonale a blocchi, con blocchi diagonali in forma compagna, e al primo miniblocco venga attribuito come polinomio caratteristico  $\psi_1(s) = (s + 1)^2$ , mentre al secondo blocco venga attribuito come polinomio caratteristico (e minimo)  $\psi_2(s) = s + 1$ . La matrice  $K$  che soddisfa tale condizione è data da

$$K = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Scegliendo  $L = K^T$  siamo certi che la matrice  $F + LH$  che regola la dinamica dell'errore di stima ha una forma di Jordan ottenuta come unione delle due forme di Jordan dei due blocchi diagonali e quindi del tipo

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e perciò presenti i soli modi  $e^{-t}$  e  $te^{-t}$ .

iii) [3 punti] Per il principio di separazione del regolatore è sufficiente trovare (se possibile) una matrice  $K$  in modo tale che  $F + gK$  sia asintoticamente stabile e una matrice  $L$  tale che  $F + LH$  sia asintoticamente stabile. La matrice  $L$  esiste e possiamo scegliere, ad esempio, quella determinata al punto ii), ovvero:

$$L = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Per quanto riguarda la matrice  $K$  che rappresenta un controllore stabilizzante, la coppia  $(F, g)$  è raggiungibile, dal momento che la matrice di raggiungibilità

$$\mathcal{R} = [g \quad Fg \quad F^2g] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è invertibile. Pertanto esiste un controllore stabilizzante. Se impongo, ad esempio,  $\Delta_{F+gK}(s) = (s + 1)^3$ , trovo come unica soluzione

$$K = [-1/2 \quad -4 \quad -8].$$