Primo test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/10

1. Si determinimo i punti di equilibrio, in corrispondenza ad un generico ingresso costante $u(t) = \bar{u}, t \geq 0$, dei seguenti modelli di stato a tempo continuo o a tempo discreto:

   (a) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + \sin u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_1(t)x_2^2(t); \end{cases}$ ....

   (b) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t) - x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t); \end{cases}$ ....

   (c) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sqrt{x_2(t)} - u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t); \end{cases}$ ....

   (d) $\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + x_1(t)u^2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t); \end{cases}$ ....

   (e) $\begin{cases} x_1(t+1) = x_1^2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t) - u(t); \end{cases}$ ....

   (f) $\begin{cases} x_1(t+1) = x_1^2(t) - 2^{x_2(t)+1} \\ x_2(t+1) = x_1^2(t)x_2(t). \end{cases}$ ....

2. Si verifichi che l'origine è punto di equilibrio, in corrispondenza all'ingresso nullo, per ciascuno dei seguenti modelli di stato a tempo continuo o a tempo discreto. Si linearizzino tali sistemi in un intorno del punto $\Big(x_e = (0,0), \bar{u} = 0\Big)$:

   (a) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2^2(t) + \sin u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_1(t)x_2^2(t); \end{cases}$ ....

   (b) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t) - x_2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t); \end{cases}$ ....

   (c) $\begin{cases} x_1(t+1) = 1 - \cos x_2(t) - u(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - x_2(t); \end{cases}$ ....

   (d) $\begin{cases} x_1(t+1) = e^{x_2(t)} - 1 + u^2(t) \\ x_2(t+1) = x_1^2(t). \end{cases}$ ....

RISPOSTE

1. Punti di equilibrio:

   (a) Dalla prima equazione si trova
   $$x_{2e} = \sin \bar{u}.$$
   La seconda equazione si riscrive nella forma
   $$0 = x_{1e}(1 - x_{2e}^2)$$
   che, sostituendo l'espressione di x_{2e} prima determinata, diventa
   $$0 = x_{1e}(1 - \sin^2 \bar{u}) = x_{1e} \cos^2 \bar{u}.$$
   Se $\bar{u} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, allora la seconda equazione è nulla per ogni scelta di x_{1e}. Pertanto abbiamo l'insieme infinito di punti di equilibrio $(x_{1e}, \sin \bar{u})$, con x_{1e} arbitrario in $\mathbb{R}$. Se invece $\bar{u} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, allora $\cos^2 \bar{u} \neq 0$ e quindi la seconda equazione si annulla solo per $x_{1e} = 0$. Di conseguenza esiste un solo punto di equilibrio: $(0, \sin \bar{u})$.

   (b) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono
   $$\begin{cases} 0 &= x_{1e}x_{2e} - x_{2e}\bar{u} = (x_{1e} - \bar{u})x_{2e} \\ 0 &= x_{1e}x_{2e}. \end{cases}$$
   Se $x_{2e} = 0$ entrambe le identità sono soddisfatte per ogni scelta di x_{1e}. Di conseguenza i punti di equilibrio sono tutti i punti del tipo $(x_{1e}, 0)$, con x_{1e} arbitrario in $\mathbb{R}$. Se $x_{2e} \neq 0$ allora la seconda equazione è soddisfatta solo per $x_{1e} = 0$. Tuttavia la prima equazione può essere soddisfatta solo se $\bar{u} = 0$ e in tal caso x_{2e} è arbitrario. Se $\bar{u} \neq 0$ non c'è soluzione.

   In definitiva, se $\bar{u} = 0$ i punti di equilibrio sono
   $$\{(x_{1e}, 0), x_{1e} \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, x_{2e}), x_{2e} \in \mathbb{R}\}.$$
   Se $\bar{u} \neq 0$ i punti di equilibrio sono
   $$\{(x_{1e}, 0), x_{1e} \in \mathbb{R}\}.$$

   (c) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono
   $$\begin{cases} 0 &= \sqrt{x_{2e}} - \bar{u} \\ 0 &= x_{1e} - x_{2e}. \end{cases}$$
   La prima equazione è risolubile solo se $\bar{u} \geq 0$ e in tal caso x_{2e} coincide con $\bar{u}^2$, mentre dalla seconda equazione si deduce che $x_{1e} = x_{2e} = \bar{u}^2$.

   (d) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono
   $$\begin{cases} x_{1e} &= -x_{2e} + x_{1e}\bar{u}^2 \\ x_{2e} &= x_{1e}^2. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione l'espressione di x_{2e} ricavata dalla seconda equazione, si ottiene

$$x_{1e} = -x_{1e}^2 + x_{1e}\bar{u}^2$$

che si riscrive nella forma

$$x_{1e}^2 + x_{1e}(1 - \bar{u}^2) = x_{1e}(x_{1e} - (\bar{u}^2 - 1)).$$

Se $x_{1e} = 0$ quest'ultima equazione è soddisfatta e $x_{2e} = x_{1e}^2 = 0$. Di conseguenza il punto di equilibrio è $(0, 0)$.
Viceversa se $x_{1e} \neq 0$ allora deve valere

$$x_{1e} = \bar{u}^2 - 1$$

e, in corrispondenza, otteniamo $x_{2e} = x_{1e}^2 = (\bar{u}^2 - 1)^2$. Pertanto il punto di equilibrio è $(\bar{u}^2 - 1, (\bar{u}^2 - 1)^2)$.

(e) Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} x_{1e} &= x_{1e}^2 \\ x_{2e} &= x_{1e}^2 - \bar{u}. \end{cases}$$

La prima equazione è soddisfatta se e solo se $x_{1e} = 0$ oppure $x_{1e} = 1$. Nel primo caso la seconda equazione diventa

$$x_{2e} = -\bar{u}$$

e porta quindi al punto di equilibrio $(0, -\bar{u})$. Nel secondo caso la seconda equazione diventa

$$x_{2e} = 1 - \bar{u}$$

e porta quindi al punto di equilibrio $(1, 1 - \bar{u})$.

(f) In questo caso abbiamo a che fare con un sistema autonomo e quindi non abbiamo una parametrizzazione rispetto al valore di $\bar{u}$. Le equazioni che permettono di identificare i punti di equilibrio in corrispondenza all'ingresso costante $\bar{u}$ sono

$$\begin{cases} x_{1e} &= x_{1e}^2 - 2^{x_{2e}+1} \\ x_{2e} &= x_{1e}^2 x_{2e}. \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta se e solo se $x_{2e} = 0$ oppure $x_{1e} = \pm 1$. Nel primo caso la prima equazione diventa

$$0 = x_{1e}^2 - x_{1e} - 2 = (x_{1e} - 2)(x_{1e} + 1)$$

e porta quindi ai punto di equilibrio $(-1, 0)$ e $(2, 0)$. Nel secondo caso la prima equazione diventa per $x_{1e} = 1$

$$0 = 2^{x_{2e}+1}$$

che non ha soluzione finita e per $x_{1e} = -1$

$$2 = 2^{x_{2e}+1}$$

che porta quindi al punto di equilibrio $(-1, 0)$.

2. Linearizzazione: La verifica è banale, perchè richiede semplicemente di inserire i valori tutti nulli per le tre variabili x_{1e}, x_{2e} e $\bar{u}$ e verificare il soddisfacimento delle equazioni che determinano i punti di equilibrio. Per quanto concerne la linearizzazione, nel caso continuo le equazioni sono tutte del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)). \end{cases}$$

Di conseguenza il sistema linearizzato in un intorno di $x_e = (0,0)$ e $\bar{u} = 0$ assume la forma (vettoriale, per compattezza)

$$\delta\dot{x}(t) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} \qquad G = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0}.$$

Similmente nel caso discreto le equazioni sono tutte del tipo

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= f_1(x_1(t), x_2(t), u(t)) \\ x_2(t+1) &= f_2(x_1(t), x_2(t), u(t)). \end{cases}$$

Di conseguenza il sistema linearizzato in un intorno di $x_e = (0,0)$ e $\bar{u} = 0$ assume la forma (vettoriale, per compattezza)

$$\delta x(t+1) = F\delta x(t) + G\delta u(t)$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} \qquad G = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0}.$$

Pertanto nel seguito ci limiteremo a valutare le matrici F e G.

(a) Si trova

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -2x_2 \\ 1 - x_2^2 & -2x_1x_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \cos u \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Si trova

$$F = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - u \\ -2x_1x_2 & -x_1^2 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Si trova

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \sin x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Si trova

$$F = \begin{bmatrix} 0 & e^{x_2} \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \end{bmatrix}\Bigg|_{x_1=x_2=0,u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$