Primo test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 15 Ottobre 2009

1. Si determinino i modi elementari e le evoluzioni libere, in corrispondenza alle condizioni iniziali assegnate, dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale (omogenea) lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 2 punti):

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = 0, \quad y(0^-) = 1, \dfrac{dy(0^-)}{dt} = -1;$ ....

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = 0, \quad y(0^-) = 0, \dfrac{dy(0^-)}{dt} = 1;$ ....

   (c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} = 0, \quad y(0^-) = 1, \dfrac{dy(0^-)}{dt} = 2;$ ....

   (d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} = 0, \quad y(0^-) = 1, \dfrac{dy(0^-)}{dt} = 2, \dfrac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 1;$ ....

   (e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 10y(t) = 0, \quad y(0^-) = 1, \dfrac{dy(0^-)}{dt} = 0.$ ....

2. Per ciascuno dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale (omogenea) lineare e a coefficienti costanti si determini l'insieme di tutte e sole le condizioni iniziali $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}\right)$ a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente a zero (ogni domanda vale 2 punti):

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 2y(t) = 0;$ ....

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - y(t) = 0;$ ....

   (c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + y(t) = 0.$ ....

3. Si determini la risposta impulsiva dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 2 punti):

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = u(t);$ ....

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2};$ ....

   (c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) = \dfrac{du}{dt} + 2u(t);$ ....

   (d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} = \dfrac{d^2u}{dt^2}.$ ....

4. Si determini l'evoluzione forzata, in corrispondenza ai segnali di ingresso assegnati, dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 2 punti):

(a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = u(t), \quad u(t) = \delta_{-1}(t);$ ....

(b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}, \quad u(t) = t \cdot \delta_{-1}(t);$ ....

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) = \dfrac{du}{dt} + 2u(t), \quad u(t) = \delta(t) + 2e^{-t}\delta_{-1}(t).$ ....

RISPOSTE

1. Modi elementari ed evoluzioni libere:

   (a) Modi: e^{jt} e e^{-jt} o, equivalentemente, $\cos t$ e $\sin t$.
   Evoluzione libera: $y_\ell(t) = \cos t - \sin t = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

   (b) Modi: e^{-2t} e te^{-2t}.
   Evoluzione libera: $y_\ell(t) = te^{-2t}$.

   (c) Modi: 1 e e^t.
   Evoluzione libera: $y_\ell(t) = 2e^t - 1$.

   (d) Modi: $1, t$ e $t^2/2$.
   Evoluzione libera: $y_\ell(t) = 1 + 2t + \frac{t^2}{2}$.

   (e) Modi: $e^{(-1+j3)t}$ e $e^{(-1-j3)t}$ o, equivalentemente, $e^{-t}\cos(3t)$ e $e^{-t}\sin(3t)$.
   Evoluzione libera: $y_\ell(t) = e^{-t}\cos(3t) + \frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t)$.

2. Condizioni iniziali a cui corrisponde un'evoluzione libera convergente:

   (a) ogni coppia $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}\right)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

   (b) ogni coppia $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}\right)$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che soddisfi $y(0^-) = -\frac{dy(0^-)}{dt}$;

   (c) la sola coppia banale $\left(y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}\right) = (0, 0)$.

3. Risposta impulsiva:

   (a) $w(t) = \sin t\ \delta_{-1}(t)$;

   (b) $w(t) = \delta(t) - 4[e^{-2t} - te^{-2t}]\delta_{-1}(t)$;

   (c) $w(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t)$;

   (d) $w(t) = \delta_{-1}(t)$.

4. Evoluzione forzata:

   (a) $y_f(t) = [1 - \cos t]\delta_{-1}(t)$;

   (b) $y_f(t) = t \cdot e^{-2t}\delta_{-1}(t)$;

   (c) $y_f(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t)$.