Secondo test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Con riferimento alle seguenti matrici, si identifichino gli autovalori e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche. Conseguentemente, se ne deduca la forma di Jordan e il polinomio minimo:

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ....

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ....

   (c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; ....

   (d) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; ....

   (e) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. ....

2. Con riferimento alle seguenti matrici, indicate con il simbolo F, se ne determini la forma di Jordan J e si determini una matrice T nonsingolare tale che $T^{-1}FT = J$ (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ....

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ....

   (c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. ....

3. Si determini, per $k \in \mathbb{Z}_+$, l'evoluzione libera di stato ed uscita del modello di stato a tempo discreto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= F\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= H\mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

   in corrispondenza alle seguenti scelte delle matrici F e H e dello stato iniziale $\mathbf{x}(0)$:

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 1\,], \mathbf{x}(0) = [\,0 \quad 1\,]^T$; ....

(b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 0 \quad 1\,], \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 1 \quad 1\,]^T;$ ....

(c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 0 \quad 1\,], \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 0 \quad 2\,]^T.$ ....

RISPOSTE

1. Forma di Jordan, autovalori e relative molteplicità (nel seguito indicheremo con n_i la molteplicità algebrica dell'autovalore λ_i, con s_i la sua molteplicità geometrica e con m_i la sua molteplicità nel polinomio minimo):

   (a) Chiaramente $\Delta_F(z) = (z-1)^2(z-2)$ e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, il primo zero doppio e il secondo zero semplice del polinomio caratteristico. Pertanto $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$. Di conseguenza $1 \leq s_1 \leq n_1 = 2$ mentre $s_2 = n_2 = 1$. Una valutazione diretta di $\dim U_1 = \dim \ker(\lambda_1 I_3 - F) = 3 - \operatorname{rank}(I_3 - F)$ fornisce $s_1 = 2$. Ma allora la forma di Jordan di F è

   $$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Le molteplicità di λ_1 e λ_2 nel polinomio minimo coincidono con le dimensioni dei più grandi miniblocchi relativi a tali autovalori nella forma di Jordan. Pertanto $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$ e il polinomio minimo è $\Psi_F(z) = (z-1)(z-2)$.

   (b) Chiaramente $\Delta_F(z) = (z-1)^3$ e quindi F ha un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $n_1 = 3$. Di conseguenza $1 \leq s_1 \leq n_1 = 3$. Una valutazione diretta di $\dim U_1 = \dim \ker(\lambda_1 I_3 - F) = 3 - \operatorname{rank}(I_3 - F)$ fornisce $s_1 = 2$. Ma allora la forma di Jordan di F è

   $$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Le molteplicità di λ_1 nel polinomio minimo coincide con la dimensione del più grande miniblocco relativo a tale autovalore nella forma di Jordan. Pertanto $m_1 = 2$ e il polinomio minimo è $\Psi_F(z) = (z-1)^2$.

   (c) In questo caso $\Delta_F(z) = z^3$ e quindi F ha un solo autovalore $\lambda_1 = 0$ di molteplicità $n_1 = 3$. Di conseguenza $1 \leq s_1 \leq n_1 = 3$. Una valutazione diretta di $\dim U_0 = \dim \ker(\lambda_1 I_3 - F) = 3 - \operatorname{rank} F$ fornisce $s_1 = 1$. Ma allora la forma di Jordan di F è

   $$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Le molteplicità di λ_1 nel polinomio minimo coincide con la dimensione del più grande miniblocco relativo a tale autovalore nella forma di Jordan. Pertanto $m_1 = 3$ e il polinomio minimo è $\Psi_F(z) = z^3 = \Delta_F(z)$.

   (d) In questo caso $\Delta_F(z) = z^2(z-3)$ e quindi gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$, il primo zero doppio e il secondo zero semplice del polinomio caratteristico. Pertanto $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$. Di conseguenza $1 \leq s_1 \leq n_1 = 2$ mentre $s_2 = n_2 = 1$. Una valutazione diretta di $\dim U_0 = \dim \ker(\lambda_1 I_3 - F) = 3 - \operatorname{rank} F$ fornisce $s_1 = 1$. Ma allora la forma di Jordan di F è

   $$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Le molteplicità di λ_1 e λ_2 nel polinomio minimo coincidono con le dimensioni dei più grandi miniblocchi relativi a tali autovalori nella forma di Jordan. Pertanto $m_1 = 2$ e $m_2 = 1$ e il polinomio minimo è $\Psi_F(z) = z^2(z-3) = \Delta_F(z)$.

(e) Chiaramente $\Delta_F(z) = (z+1)^3$ e quindi F ha un solo autovalore $\lambda_1 = -1$ di molteplicità $n_1 = 3$. Di conseguenza $1 \leq s_1 \leq n_1 = 3$. Una valutazione diretta di $\dim U_1 = \dim \ker(\lambda_1 I_3 - F) = 3 - \operatorname{rank}(-I_3 - F)$ fornisce $s_1 = 1$. Ma allora la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le molteplicità di λ_1 nel polinomio minimo coincide con la dimensione del più grande miniblocco relativo a tale autovalore nella forma di Jordan. Pertanto $m_1 = 3$ e il polinomio minimo è $\Psi_F(z) = (z+1)^3$.

2. Calcolo della forma di Jordan e della matrice di cambio di base:

(a) La matrice F è diagonale a blocchi, perciò se otteniamo la forma di Jordan del primo blocco e la forma di Jordan del secondo blocco e andiamo a riordinare (se necessario) i miniblocchi così ottenuti, otteniamo la forma di Jordan della matrice F stessa. Nel caso del secondo blocco, trattandosi di una matrice 1×1, abbiamo già una forma di Jordan. Per quanto concerne il primo blocco

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

poichè si tratta di una matrice 2×2 con due autovalori distinti, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi semplici ($n_1 = n_2 = 1$), essa è diagonalizzabile. La forma di Jordan di F_1 è

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e una matrice $T_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ di cambio di base che porta F_1 nella forma di Jordan J_1 è del tipo $T_1 = [\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2\,]$ con $\mathbf{v}_i$ (il vettore delle coordinate di) un autovettore di F_1 relativo a λ_i. Si trova, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ che portano a

$$T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza,

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) La matrice F è diagonale a blocchi, perciò se otteniamo la forma di Jordan del primo blocco e la forma di Jordan del secondo blocco e andiamo a riordinare (se necessario) i miniblocchi così ottenuti, otteniamo la forma di Jordan della matrice F stessa. Nel caso del secondo blocco, trattandosi di una matrice 1×1, abbiamo già una forma di Jordan. Per quanto concerne il primo blocco

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

si tratta di una matrice 2×2 con un solo autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $n_1 = 2$, non diagonalizzabile. La forma di Jordan di F_1 è

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e una matrice $T_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ di cambio di base che porta F_1 nella forma di Jordan J_1 consta di due colonne, ovvero $T_1 = [\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2\,]$. La prima è necessariamente (il vettore delle coordinate di) un autovettore di F_1 relativo a $\lambda_1 = 1$. La seconda va scelta in modo da soddisfare

$$F_1 T_1 = T_1 J_1.$$

Si trova, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'altra parte $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ deve soddisfare il vincolo $a = -1$. Scegliamo allora, ad esempio, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e di conseguenza otteniamo

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) La matrice F ha un autovalore $\lambda_1 = 1$ di molteplicità $n_1 = 2$ e un autovalore $\lambda_2 = 2$ di molteplicità $n_2 = 1$. Si tratta di capire se la sua forma di Jordan è

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

oppure

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La prima forma di Jordan corrisponde al caso in cui la molteplicità geometrica s_1 dell'autovalore λ_1 è unitaria, la seconda al caso in cui $s_1 = 2$. È immediato verificare che $\dim(\ker(\lambda_1 I_3 - F)) = 1$ e pertanto ci troviamo nel primo caso. Pertanto

$$J = J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ di cambio di base consta di tre colonne, ovvero $T = [\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\,]$. La prima è necessariamente (il vettore delle coordinate di) un autovettore di F relativo a $\lambda_1 = 1$, mentre la terza è necessariamente (il vettore delle coordinate di) un autovettore di F relativo a $\lambda_2 = 2$. La seconda, infine, va scelta in modo da soddisfare

$$FT = TJ.$$

Si trova, ad esempio, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'altra parte, assumendo $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e imponendo la condizione $FT = TJ$ (in particolare, eguagliando la seconda colonna della matrice prodotto al primo membro con la seconda colonna della matrice prodotto al secondo membro), si trova $2b = 1$ e $c = 0$. Scegliamo allora, ad esempio, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, di conseguenza, otteniamo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Evoluzione libera:

   (a) È immediato verificare che $F^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}$ da cui segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= F^k\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ y(k) &= HF^k\mathbf{x}(0) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

   (b) È facile verificare che $F^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$ da cui segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= F^k\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-k \\ 2^k \end{bmatrix} \\ y(k) &= HF^k\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1-k \\ 2^k \end{bmatrix} = 1 + 2^k. \end{aligned}$$

   (c) È immediato verificare che $F^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^k - 1 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$ da cui segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= F^k\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^k - 1 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^k - 1 \\ 2(-1)^k \end{bmatrix} \\ y(k) &= HF^k\mathbf{x}(0) = [1 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 2^k - 1 \\ 2(-1)^k \end{bmatrix} = 1 + 2(-1)^k. \end{aligned}$$