Secondo test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 22 Ottobre 2009

1. Si calcolino le trasformate di Laplace dei seguenti segnali (ogni domanda vale 1 punto).

   (a) $f(t) = 1 + \delta(t) + t^2$; ....

   (b) $f(t) = t \cdot e^{-t} + t\delta_{-1}(t)$; ....

   (c) $f(t) = 5e^t\delta_{-1}(t) + 5e^{-t}\delta_{-1}(-t)$; ....

   (d) $f(t) = \frac{d\delta}{dt} + t \cdot \sin t$; ....

   (e) $f(t) = \begin{cases} e^{t-\pi} + 1, & \text{per } 0 \leq t \leq 1; \\ e^{t-\pi}, & \text{per } t > 1; \end{cases}$ ....

   (f) $f(t) = t^3 e^t + e^{2t} \cos t$. ....

2. Si calcolino le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali (ogni domanda vale 1.5 punti).

   (a) $F(s) = \frac{s^3+4s+1}{s^2+4}$; ....

   (b) $F(s) = \frac{s+1}{s(s+10)}$; ....

   (c) $F(s) = \frac{s+1}{(s+10)^2}$; ....

   (d) $F(s) = \frac{2s}{s^2+10}$; ....

   (e) $F(s) = \frac{3s^2+4s+2}{s^2+2s+2}$; ....

   (f) $F(s) = \frac{s^3-2s}{s^2+4s+8}$. ....

3. Si determini, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, la risposta impulsiva dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 2 punti):

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y(t) = u(t)$; ....

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = 3\dfrac{du}{dt}$; ....

   (c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$; ....

   (d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + (1+\pi^2)y(t) = \dfrac{du}{dt} - u(t)$. ....

4. Si determini, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, l'evoluzione forzata, in corrispondenza alle sollecitazioni di ingresso assegnate, dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 2.5 punti):

(a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y(t) = u(t), u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t);$ ....

(b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) = 3\dfrac{du}{dt}, u(t) = \delta_{-1}(t);$ ....

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2u}{dt^2}, u(t) = t \cdot e^{-5t}\delta_{-1}(t);$ ....

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + (1+\pi^2)y(t) = \dfrac{du}{dt} - u(t), u(t) = e^{t}\delta_{-1}(t).$ ....

RISPOSTE

1. Trasformate di Laplace:

   (a) $F(s) = \frac{1}{s} + 1 + \frac{2}{s^3}$.

   (b) $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2}$.

   (c) $F(s) = \frac{5}{s-1} + 0$.

   (d) $F(s) = s + (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = s + \frac{2s}{(s^2+1)^2}$.

   (e) Il calcolo diretto porta a $F(s) = e^{-\pi}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s}$.

   (f) $F(s) = \frac{3!}{(s-1)^4} + \frac{s-2}{(s-2)^2+1^2}$.

2. Antitrasformate di Laplace (per semplicità assumiamo tra tutte le soluzioni possibili quelle nulle per $t < 0$):

   (a) $f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \frac{1}{2}\sin(2t)\ \delta_{-1}(t)$;

   (b) $f(t) = [0.1 + 0.9e^{-10t}]\ \delta_{-1}(t)$;

   (c) $f(t) = [1 - 9t]e^{-10t}\ \delta_{-1}(t)$;

   (d) $f(t) = 2\cos(\sqrt{10}t)\ \delta_{-1}(t)$;

   (e) $f(t) = 3\delta(t) - 2[e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t]\ \delta_{-1}(t)$;

   (f) $f(t) = -4\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt} + 6e^{-2t}\cos(2t) + 10e^{-2t}\sin(2t)$.

3. Risposte impulsive:

   (a) $w(t) = \sin t\delta_{-1}(t)$;

   (b) $w(t) = [3 - 6t]e^{-2t}\delta_{-1}(t)$;

   (c) $w(t) = \delta(t) + e^t\delta_{-1}(t)$;

   (d) $w(t) = [e^{-t}\cos(\pi t) - \frac{2}{\pi}e^{-t}\sin(\pi t)]\delta_{-1}(t)$.

4. Evoluzioni forzate:

   (a) $y_f(t) = \dfrac{1}{5}\left[e^{-t} - \cos(2t) + \dfrac{1}{2}\sin(2t)\right]\delta_{-1}(t)$;

   (b) $y_f(t) = \left[3e^{-2t} - 3e^{-3t}\right]\delta_{-1}(t)$;

   (c) $y_f(t) = \dfrac{1}{36}\left[e^{t} - e^{-5t} + 30t \cdot e^{-5t}\right]\delta_{-1}(t)$;

   (d) $y_f(t) = \dfrac{1}{\pi}e^{-t}\sin(\pi t)\delta_{-1}(t)$.