

Terzo test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 29 Ottobre 2009

1. Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (ogni domanda vale 1.5 punti):

- (a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y(t) = \frac{d^2u}{dt^2};$
- (b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y(t) = \frac{du}{dt};$
- (c) $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2};$
- (d) $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{du}{dt} + 2u(t);$
- (e) $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4y(t) = \frac{du}{dt} + 4u(t).$

2. Si studi, al variare del parametro reale a , la stabilità asintotica dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (senza calcolarne esplicitamente le radici caratteristiche) (ogni domanda vale 1.25 punti):

- (a) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4a\frac{dy}{dt} + (1 - a)y(t) = 0;$
- (b) $\frac{d^2y}{dt^2} - a\frac{dy}{dt} + (4 - a)y(t) = \frac{d^2u}{dt^2};$
- (c) $\frac{d^3y}{dt^3} + a\frac{dy}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2};$
- (d) $a\frac{d^2y}{dt^2} + 5a\frac{dy}{dt} + (1 + a)y(t) = \frac{du}{dt}.$

3. Si valuti, mediante il criterio di Routh, se i seguenti polinomi sono di Hurwitz e, in caso negativo, si determini, ove possibile, il numero di radici a parte reale positiva (ogni domanda vale 1.5 punti):

- (a) $d(s) = s^4 + 5s^3 - 3s^2 + 2s - 1;$
- (b) $d(s) = 2s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s - 1;$
- (c) $d(s) = 4s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 3s + 1;$
- (d) $d(s) = 4s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 3s + 1;$
- (e) $d(s) = s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 1.$

4. Si dica se esiste la risposta di regime permanente di ciascun sistema in corrispondenza al segnale e alle condizioni iniziali assegnati e, in caso affermativo, la si determini (ogni domanda vale 2.5 punti).

(a) sistema descritto dall'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}$ con ingresso $u(t) = e^{j(t+\phi)}\delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali nulle;

.....
 (b) sistema descritto dall'equazione differenziale $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 5y(t) = \frac{du}{dt}$ con ingresso $u(t) = \sin t \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali $y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = 1$;

.....
 (c) sistema descritto dal legame ingresso/uscita $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{du}{dt} + 2u(t)$ con ingresso $u(t) = e^{j(1-t)} \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali arbitrarie.

.....
 (d) sistema descritto dal legame ingresso/uscita $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 6y(t) = \frac{du}{dt} - u(t)$ con ingresso $u(t) = \cos(t + \phi) \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali $\frac{dy(0^-)}{dt} = -6y(0^-)$.

.....

RISPOSTE

1. Stabilità asintotica e stabilità BIBO:

- (a) asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile;
- (b) nè asintoticamente stabile nè BIBO stabile;
- (c) non asintoticamente stabile ma BIBO stabile;
- (d) asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile;
- (e) nè asintoticamente stabile nè BIBO stabile.

2. Stabilità asintotica al variare di un parametro:

- (a) asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$;
- (b) asintoticamente stabile se e solo se $a < 0$;
- (c) non è mai asintoticamente stabile;
- (d) asintoticamente stabile se e solo se $0 < a$ oppure $a < -1$.

3. Routh:

- (a) non è di Hurwitz ed ha tre radici a parte reale positiva;
- (b) non è di Hurwitz ed ha una sola radice a parte reale positiva;
- (c) non è di Hurwitz ma la tabella non può essere completata. Pertanto dalla tabella non è possibile appurare il numero delle radici a parte reale positiva;
- (d) non è di Hurwitz ed ha due radici a parte reale positiva;
- (e) è di Hurwitz.

4. Risposta di regime permanente:

- (a) Il sistema non è asinoticamente stabile (ha una radice caratteristica in 0) tuttavia è BIBO stabile e poichè le condizioni iniziali assegnate sono tutte nulle, ciò è sufficiente per poter affermare che esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale assegnato. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega} = 1$$

e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = e^{j\phi} e^{jt} \delta_{-1}(t)$ con l'uscita (di regime permanente)

$$y_{rp}(t) = W(j)e^{j\phi} e^{jt} \delta_{-1}(t) = e^{j\phi} e^{jt} \delta_{-1}(t) = u(t).$$

- (b) Il sistema è asinoticamente stabile pertanto esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, a partire da qualunque coppia di condizioni iniziali e quindi, in particolare, per $y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = 1$. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 5} = \frac{j\omega}{(5 - \omega^2) + j\omega}$$

e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = \sin t \delta_{-1}(t)$ con l'uscita di regime permanente

$$y_{rp}(t) = |W(j1)| \sin(t + \arg W(j1)) \delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) \delta_{-1}(t),$$

giacché $W(j) = \frac{j}{4+j}$ ha modulo

$$|W(j1)| = \frac{1}{\sqrt{17}},$$

e fase

$$\arg W(j1) = \arg\left(\frac{j}{4+j}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg(4+j) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{4}\right).$$

- (c) Il sistema è asintoticamente stabile pertanto esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, a partire da qualunque coppia di condizioni iniziali assegnate. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{1}{j\omega + 3}$$

e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = e^j e^{-jt} \delta_{-1}(t)$ con l'uscita di regime permanente

$$y_{rp}(t) = W(-j)e^j e^{-jt} \delta_{-1}(t) = \frac{1}{3-j} e^j e^{-jt} \delta_{-1}(t).$$

- (d) Il sistema non è asintoticamente stabile (ha una radice caratteristica in 1) tuttavia è BIBO stabile. Poichè le condizioni iniziali assegnate non sono tutte nulle, è necessario verificare che in corrispondenza alla famiglia di condizioni iniziali assegnate l'evoluzione libera converga a zero. In tale ipotesi esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, in caso contrario non esiste. In generale l'evoluzione libera del sistema ha la forma

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^t, t \in \mathbb{R}_+.$$

È immediato verificare che, in corrispondenza alla famiglia di condizioni iniziali assegnate, l'evoluzione libera è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-6t}, t \in \mathbb{R}_+,$$

e pertanto converge a zero. Ma allora esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale assegnato ed essa vale

$$y_{rp}(t) = |W(j1)| \cos(t + \phi + \arg W(j1)) \delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{37}} \sin\left(t + \phi - \arctan\left(\frac{1}{6}\right)\right) \delta_{-1}(t),$$

giacché $W(j) = \frac{1}{6+j}$ ha modulo

$$|W(j1)| = \frac{1}{\sqrt{37}},$$

e fase

$$\arg W(j1) = \arg\left(\frac{1}{6+j}\right) = -\arg(6+j) = -\arctan\left(\frac{1}{6}\right).$$