Quarto test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Si determini, lavorando nel dominio delle trasformate zeta, le evoluzioni di stato ed uscita dei sistemi assegnati, in corrispondenza alle specifiche scelte della condizione iniziale e della sollecitazione di ingresso:

   (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k),\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k),\\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{0}, u(k) = 2^k\delta_{-1}(k-1);\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}u(k),\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k),\\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, u(k) = 0;\end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u(k),\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k),\\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, u(k) = \delta_{-1}(k).\end{aligned}$$

2. Si studi la stabilità asintotica, semplice e BIBO dei seguenti modelli di stato:

   (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}u(k),\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k),\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(k),\\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) - u(k),\end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1/2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k), \qquad a \in \mathbb{R}, \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \qquad a \in \mathbb{R}, \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -3a-3 & 1 \\ 0 & -1+a^2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(k), \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k).
\end{aligned}
$$

RISPOSTE

1. Calcolo di evoluzione di stato ed uscita:

   (a) Il fatto che la condizione iniziale sia nulla assicura che le evoluzioni di stato ed uscita che andiamo a calcolare siano puramente forzate e valgono pertanto le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI_n - F)^{-1} G U(z), && (1)\\ Y(z) &= [H(zI_n - F)^{-1} G + D] U(z). && (2) \end{aligned}$$

   Poiché $u(k) = 2 \cdot (2^{k-1}\delta_{-1}(k-1))$, la trasformata zeta dell'ingresso assegnato è

$$U(z) = 2z^{-1} \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{2}{z-2}.$$

   Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} X_f(z) &= \begin{bmatrix} z-1 & -3 \\ 0 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2}{z-2} \\ &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} 3 \\ z-1 \end{bmatrix} \frac{2}{z-2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{(z-1)(z-2)^2} \\ \frac{2}{(z-2)^2} \end{bmatrix} \\ Y_f(z) &= [1 \quad -1]\, X_f(z) = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \frac{6}{(z-1)(z-2)^2} \\ \frac{2}{(z-2)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{8-2z}{(z-1)(z-2)^2}. \end{aligned}$$

   Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_f(k) &= \begin{bmatrix} 6\left(1 - 2^{k-1}\right)\delta_{-1}(k-1) + 6\binom{k-1}{1}2^{k-2} \\ \binom{k-1}{1}2^{k-1} \end{bmatrix} \\ y_f(k) &= \left(6 - 6\; 2^{k-1}\right)\delta_{-1}(k-1) + 4\binom{k-1}{1}2^{k-2}. \end{aligned}$$

   (b) In questo caso il fatto che l'ingresso applicato sia identicamente nullo assicura che le evoluzioni di stato ed uscita che andiamo a calcolare siano puramente libere e valgono pertanto le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI_n - F)^{-1} z\mathbf{x}(0), && (3)\\ Y(z) &= H(zI_n - F)^{-1} z\mathbf{x}(0). && (4) \end{aligned}$$

   Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} X_\ell(z) &= \begin{bmatrix} z-1 & 0 \\ 1 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} z-1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ -\frac{z}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \\ Y_\ell(z) &= [1 \quad 1]\, X_\ell(z) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ -\frac{z}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2}. \end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova, per $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\ell(k) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\binom{k}{1} \end{bmatrix} \\ y_\ell(k) &= 1 - \binom{k}{1}.\end{aligned}$$

(c) In questo caso, avendo non nulle sia la condizione iniziale che la sollecitazione di ingresso, dovremo trovare sia le componenti di evoluzione libera che quelle di evoluzione forzata di stato ed ingresso. Per quanto concerne l'evoluzione libera, rifacendosi alle (3)-(4), troviamo:

$$\begin{aligned}X_\ell(z) &= \begin{bmatrix} z+1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z}{(z-1)(z+1)} \begin{bmatrix} z \\ z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z^2-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \\ Y_\ell(z) &= [0 \quad 1]\, X_\ell(z) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z^2}{z^2-1} \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{z}{z-1}.\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova, per $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\ell(k) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(-1)^k + 1] \\ 1 \end{bmatrix} \\ y_\ell(k) &= 1.\end{aligned}$$

Per quanto concerne l'evoluzione forzata, rifacendosi alle (1)-(2), troviamo:

$$\begin{aligned}X_f(z) &= \begin{bmatrix} z+1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ &= -\frac{z}{(z-1)^2(z+1)} \begin{bmatrix} 1 \\ z+1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)^2(z+1)} \\ \frac{z}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \\ Y_f(z) &= [0 \quad 1]\, X_f(z) = -[0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)^2(z+1)} \\ \frac{z}{(z-1)^2} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{z}{(z-1)^2}.\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f(k) &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{4}[(-1)^k - 1]\delta_{-1}(k) + \frac{1}{2}\binom{k}{1} \\ \binom{k}{1} \end{bmatrix} \\ y_f(k) &= -\binom{k}{1}.\end{aligned}$$

2. Stabilità asintotica, semplice e BIBO:

(a) È immediato verificare che F è un miniblocco di Jordan di dimensione 2 relativo all'autovalore 1, pertanto il sistema presenta i modi 1 (limitato) e $k = \binom{k}{1}$ divergente. Ma allora il sistema è instabile, non essendo nè asintoticamente stabile nè semplicemente stabile. È chiaro che la funzione di trasferimento del sistema sarà del tipo

$$W(z) = \frac{n(z)}{(z-1)^2},$$

con $n(z) \in \mathbb{R}[z]$ polinomio di grado 1 (in particolare, non nullo). Pertanto non è possibile che si verifichino due semplificazioni tra numeratore e denominatore così da cancellare entrambi i poli "instabili". Di conseguenza il sistema è sicuramente non BIBO stabile.

(b) È immediato verificare che F è diagonalizzabile con autovalori (semplici) $1/2$ e -1. Poichè gli autovalori hanno tutti modulo minore o uguale a 1 e quelli di modulo unitario sono semplici, il sistema sarà semplicemente stabile, ma non asintoticamente stabile. A questo punto il sistema potrà essere BIBO stabile se e solo se il fattore $z+1$ relativo all'autovalore -1 viene "cancellato" e quindi non compare al denominatore di una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento $W(z)$ del sistema. Il calcolo diretto della funzione di trasferimento porta facilmente a

$$W(z) = \frac{1}{z-1/2} - 1 = \frac{3/2 - z}{z-1/2}$$

e quindi il sistema è BIBO stabile.

(c) È immediato verificare che F è sempre diagonalizzabile con autovalori (semplici) $1/2$ e 1. Poichè gli autovalori hanno tutti modulo minore o uguale a 1 e quelli di modulo unitario sono semplici, il sistema sarà semplicemente stabile, ma non asintoticamente stabile. A questo punto il sistema potrà essere BIBO stabile se e solo se il fattore $z-1$ relativo all'autovalore 1 viene "cancellato" e quindi non compare al denominatore di una rappresentazione irriducibile della funzione di trasferimento $W(z)$ del sistema. Vediamo per quali valori del parametro a ciò è possibile. Il calcolo diretto della funzione di trasferimento porta facilmente a

$$W(z) = \frac{z-1-a}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

e quindi il sistema è BIBO stabile se e solo se $a=0$. Si noti che per $a=-1/2$ ha luogo una cancellazione ma di un autovalore di modulo minore di 1 e quindi irrilevante ai fini della "conquista" della BIBO stabilità.

(d) Distinguiamo i seguenti casi: $a=1$ e $a \neq 1$. Per $a=1$ abbiamo $\Delta_F(z) = (z-1)^2(z-1/2)$. In questo caso certamente non abbiamo la stabilità asintotica. Si tratta allora di vedere se abbiamo almeno la semplice. Poichè la dimensione dell'autospazio relativo a 1 è 1, ne consegue che nella forma di Jordan di F c'è un solo miniblocco di dimensione 2 relativo a 1. Ma allora non c'è stabilità semplice. Per $a \neq 1$ abbiamo tre autovalori (eventualmente non distinti, se $a=1/2$) di cui uno in 1. Se $|a|>1$ allora abbiamo instabilità, se $|a| \leq 1$ abbiamo stabilità semplice (perchè comunque, escludendo il caso $a=1$, gli autovalori di modulo unitario sono semplici) Il calcolo diretto della funzione di trasferimento porta a

$$W(z) = \frac{-z+2a-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-a)}$$

e quindi, poichè il fattore $z-a$ al denominatore si semplifica con il fattore $-z+2a-\frac{1}{2}$ se e solo se $2a-\frac{1}{2}=a$, ovvero $a=1/2$, situazione in cui

$$W(z) = \frac{-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)},$$

il sistema è BIBO stabile se e solo se $|a| < 1$.

(e) Distinguiamo a seconda che i due autovalori della matrice F, $\lambda_1 = -3a-3$ e $\lambda_2 = -1+a^2$, siano distinti o coincidenti. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, ovvero $-1 + a^2 = -3a - 3$, ovvero $a = -1, -2$, allora la matrice F è già in forma di Jordan e presenta un solo miniblocco di dimensione 1 relativamente all'autovalore in esame. Specificatamente, per $a = -1$ si trova

$$F = J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e per $a = -2$ si trova

$$F = J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se, invece, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ovvero $a \neq -1, -2$, allora la matrice F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} -3a-3 & 0 \\ 0 & -1+a+^2 \end{bmatrix}.$$

Valutiamo sotto quali condizioni entrambi gli autovalori hanno modulo minore di 1. Si trova che le due condizioni

$$\begin{cases} |a^2 - 1| < 1 \\ |3a + 3| < 1 \end{cases}$$

sono verificate se e solo se $-4/3 < a < -2/3$. Per $a = -4/3$ la matrice F presenta un autovalore di modulo minore di 1 ed uno (semplice) in 1, per cui si ha stabilità semplice. Per $a = 2/3$ la matrice F presenta un autovalore di modulo minore di 1 ed uno (semplice) in -1, per cui si ha stabilità semplice. Per valori esterni all'intervallo $[-4/3, -2/3]$ si ha sicuramente instabilità.

Valutiamo ora la stabilità BIBO del sistema. Certamente per i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica si ha pure stabilità BIBO. Vediamo ora se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. A tal fine valutiamo la funzione di trasferimento del sistema:

$$\begin{aligned} W(z) &= H(zI_2 - F)^{-1}G = [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z-(-3-3a) & -1 \\ 0 & z-(-1+a^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z+3a+3)(z+1-a^2)} [\,1 \quad 0\,] \begin{bmatrix} z-(-1+a^2) & 1 \\ 0 & (z-(-3a-3)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{z+3-a^2}{(z+3a+3)(z+1-a^2)}. \end{aligned}$$

Le cancellazioni posso sorgere se e solo se $3a + 3 = 3 - a^2$ (e in tal caso si trova $W(z) = 1/(z + 1 - a^2)$). Questa equazione di secondo grado ha due soluzioni ovvero $a = 0$ e $a = -3$. In corrispondenza alla soluzione $a = 0$ si trova

$$W(z) = \frac{1}{z+1}$$

e il polo della $W(z)$ ha modulo 1 per cui il sistema non è BIBO stabile. In corrispondenza alla soluzione $a = -3$ si trova, invece,

$$W(z) = \frac{1}{z-8}$$

e il polo della $W(z)$ ha modulo maggiore di 1 per cui il sistema non è BIBO stabile. Pertanto non c'è stabilità BIBO senza la stabilità asintotica.