Quinto test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Si determini, per $t \in \mathbb{R}_+$, operando nel dominio del tempo, l'evoluzione libera di stato ed uscita del modello di stato a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= F\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= H\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

in corrispondenza alle seguenti scelte delle matrici F e H e dello stato iniziale $\mathbf{x}(0)$:

(a) $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 1\,], \mathbf{x}(0) = [\,2 \quad -1\,]^T;$

(b) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 0\,], \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 1\,]^T;$

(c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 1 \quad -1\,], \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 0 \quad 1\,]^T;$

(d) $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, H = [\,1 \quad 1 \quad 0\,], \mathbf{x}(0) = [\,2 \quad -1 \quad 2\,]^T;$

2. Si determini, lavorando nel dominio delle trasformate di Laplace, le evoluzioni di stato ed uscita dei sistemi assegnati in corrispondenza alle specifiche scelte della condizione iniziale e della sollecitazione di ingresso:

(a) $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = [\,1 \quad -1\,]\,\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}, u(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t); \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = [\,1 \quad 1\,]\,\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 0\,]^T, u(t) = 0; \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{x}(0) = [\,1 \quad 0\,]^T, u(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t). \end{cases}$$

3. Si determinino i modi elementari e si studi la stabilità asintotica, semplice e BIBO dei seguenti modelli di stato:

(a)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \quad -1 \quad 0]\, \mathbf{x}(t), \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= [1 \quad -1 \quad 0]\, \mathbf{x}(t) - u(t), \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1+a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), \qquad a \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad 0]\, \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

RISPOSTE

1. Evoluzione libera di stato ed uscita:

   (a) La generica potenza della matrice F è

   $$F^i = \begin{cases} \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se } i \text{ è pari,} \\ \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}$$

   da ciò segue

   $$F^i = \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 \\ \frac{1-(-1)^i}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad i \in \mathbb{Z}_+,$$

   $$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 \\ \frac{1-(-1)^i}{2} & 1 \end{bmatrix} \frac{t^i}{i!} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & e^t \end{bmatrix}.$$

   Si trova, allora,

   $$\begin{aligned} \mathbf{x}_\ell(t) &= e^{Ft}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^t-e^{-t}}{2} & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \\ y_\ell(t) &= H\mathbf{x}_\ell(t) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t}. \end{aligned}$$

   (b) La generica potenza della matrice F è

   $$F^i = 0, \qquad \forall\, i > 1,$$

   da ciò segue

   $$e^{Ft} = I_2 + Ft = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

   Si trova, allora,

   $$\begin{aligned} \mathbf{x}_\ell(t) &= e^{Ft}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t+1 \end{bmatrix} \\ y_\ell(t) &= H\mathbf{x}_\ell(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -t+1 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

   (c) La generica potenza della matrice F è

   $$F^i = \begin{cases} F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, & \text{se } i \text{ è dispari;} \\ F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{se } i \text{ è pari e maggiore di 0.} \end{cases}$$

   Si può ricorrere all'espressione unica

   $$F^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1+(-1)^i}{2} & \frac{-1+(-1)^i}{2} & (-1)^i \end{bmatrix},$$

valida per $i \geq 1$. Da ciò segue

$$\begin{aligned}
e^{Ft} &= I_3 + \sum_{i=1}^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1+(-1)^i}{2} & \frac{-1+(-1)^i}{2} & (-1)^i \end{bmatrix} \frac{t^i}{i!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} & \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} & 0 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{t^i}{i!} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!} & \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(e^t - 1) & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right) & -\frac{1}{2}\left(e^t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right) & e^{-t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Si trova, allora,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\ell(t) &= e^{Ft}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(e^t - 1) & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}\left(e^t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right) & -\frac{1}{2}\left(e^t - 1\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - 1\right) & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -e^t + 1 \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - 1 \end{bmatrix} \\
y_\ell(t) &= H\mathbf{x}_\ell(t) = [1 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 \\ -e^t + 1 \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} - 1 \end{bmatrix} = -\frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} + 3.
\end{aligned}$$

(d) La generica potenza della matrice F è

$$F^i = \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 & 0 \\ (-1)^{i+1}2i & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^i \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}_+;$$

da ciò segue

$$e^{Ft} = \sum_{i=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} (-1)^i & 0 & 0 \\ (-1)^{i+1}2i & (-1)^i & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^i \end{bmatrix} \frac{t^i}{i!} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Si trova, allora,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\ell(t) &= e^{Ft}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 2te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ (4t-1)e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} \\
y_\ell(t) &= H\mathbf{x}_\ell(t) = [1 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ (4t-1)e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ (4t-1)e^{-t} \end{bmatrix} = (4t+1)e^{-t}.
\end{aligned}$$

2. Calcolo di evoluzione di stato ed uscita:

(a) Il fatto che la condizione iniziale sia nulla assicura che le evoluzioni di stato ed uscita che andiamo a calcolare siano puramente forzate e valgono pertanto le seguenti espressioni:

$$X(s) = (sI_n - F)^{-1}GU(s), \tag{1}$$
$$Y(s) = [H(sI_n - F)^{-1}G + D]U(s). \tag{2}$$

Poiché $u(t) = e^{2t}\delta_{-1}(t)$, la trasformata di Laplace dell'ingresso assegnato è

$$U(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
X_f(s) &= \begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s-2)} \begin{bmatrix} 3 \\ s-1 \end{bmatrix} \frac{1}{s-2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{(s-1)(s-2)^2} \\ \frac{1}{(s-2)^2} \end{bmatrix} \\
Y_f(s) &= [\,1 \quad -1\,]\, X_f(s) = [\,1 \quad -1\,] \begin{bmatrix} \frac{3}{(s-1)(s-2)^2} \\ \frac{1}{(s-2)^2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{4-s}{(s-1)(s-2)^2}.
\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_f(t) &= \begin{bmatrix} 3\left(e^t - e^{2t} + t\, e^{2t}\right)\delta_{-1}(t) \\ t\, e^{2t}\delta_{-1}(t) \end{bmatrix} \\
y_f(t) &= \left(3e^t - 3e^{2t} + 2t\, e^{2t}\right)\delta_{-1}(t).
\end{aligned}$$

(b) In questo caso il fatto che l'ingresso applicato sia identicamente nullo assicura che le evoluzioni di stato ed uscita che andiamo a calcolare siano puramente libere e valgono pertanto le seguenti espressioni:

$$X_\ell(s) = (sI_n - F)^{-1}\mathbf{x}(0), \tag{3}$$
$$Y_\ell(s) = H(sI_n - F)^{-1}\mathbf{x}(0). \tag{4}$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
X_\ell(s) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} \\
Y_\ell(s) &= [\,1 \quad 1\,]\, X_\ell(s) = [\,1 \quad 1\,] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} = \frac{s-2}{s(s-1)}.
\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\ell(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - e^t \end{bmatrix} \\
y_\ell(t) &= 2 - e^t.
\end{aligned}$$

(c) In questo caso il fatto che sia la condizione iniziale che l'ingresso applicato siano non nulli richiede il calcolo delle componenti sia libere (formule (3)-(4)) che forzate (formule (1)-(2)) delle evoluzioni di stato ed uscita. Per quanto concerne le componenti di evoluzione libera otteniamo:

$$\begin{aligned}
X_\ell(s) &= \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} \\
Y_\ell(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X_\ell(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\ell(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_\ell(t) &= \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Per le componenti di evoluzione forzata, tenuto conto del fatto che

$$U(s) = \frac{1}{s+1},$$

si trova:

$$\begin{aligned}X_f(s) &= \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 \end{bmatrix} \\ Y_f(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X_f(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} \\ -\frac{1}{(s+1)^2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine si trova

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_f(t) &= \begin{bmatrix} te^{-t}\delta_{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_f(t) &= \begin{bmatrix} te^{-t}\delta_{-1}(t) \\ -te^{-t}\delta_{-1}(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. Modi, stabilità asintotica, semplice e BIBO:

(a) È immediato verificare che F ha due autovalori distinti, uno in 0 di molteplicità algebrica 2 e uno in -1 di molteplicità algebrica uno. La valutazione della molteplicità geometrica dell'autovalore 0 restituisce subito 1. Pertanto la forma di Jordan di F presenta un solo miniblocco relativo all'autovalore 0. Di conseguenza la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema presenta i modi 1 (limitato), t (divergente) e e^{-t} (convergente). Ma allora il sistema è instabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s+1)} = \frac{s+1}{s^2},$$

e pertanto il sistema non è BIBO stabile.

(b) È immediato verificare che F ha due autovalori distinti, uno in -1 di molteplicità algebrica 2 e uno in $1/2$ di molteplicità algebrica uno. La valutazione della molteplicità geometrica dell'autovalore -1 restituisce subito 2. Pertanto la forma di Jordan di F presenta due miniblocchi relativi all'autovalore -1. Di conseguenza la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema presenta i modi $e^{t/2}$ (divergente) e e^{-t} (convergente). Ma allora il sistema è instabile. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{(s-1/2)(s+1)}{(s-1/2)(s+1)^2} - 1 = \frac{1}{s+1} - 1 = -\frac{s}{s+1},$$

e pertanto il sistema è BIBO stabile.

(c) È immediato verificare che F ha autovalori $-1+a$ e 0. Tali autovalori sono distinti per ogni valore di $a \neq 1$.

Per $a \neq 1$ la matrice del sistema ha due autovalori distinti $\lambda_1 = -1+a$ e $\lambda_2 = 0$. Il primo ha molteplicità algebrica unitaria, il secondo ha molteplicità algebrica 2. Qualunque sia $a \neq 1$, $\lambda_2 = 0$ ha molteplicità geometrica 1 e quindi la forma di Jordan di F presenta un miniblocco relativo all'autovalore 0. Di conseguenza la forma di Jordan di F è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+a \end{bmatrix}.$$

Pertanto il sistema presenta i modi 1 (limitato), t (divergente) e $e^{(-1+a)t}$ (convergente se $a < 1$, divergente se $a > 1$). Ma allora il sistema è sempre instabile.

Per $a = 1$ la matrice del sistema è un miniblocco di Jordan di dimensione 3 relativa a 0 e quindi il sistema ha modi 1 (limitato), t e $t^2/2$ (entrambi divergenti) e non è stabile.

L'analisi della BIBO stabilità non richiede una analisi differenziata. Il calcolo diretto della funzione di trasferimento porta facilmente a

$$W(s) = \frac{s^2 + as - a}{(s-(a-1))\, s^2}.$$

La cancellazione del polo doppio nell'origine (che preclude la possibilità di avere BIBO stabilità) è possibile solo per $a = 0$ e per tale valore del parametro a la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Per ogni altro valore del parametro a, la permanenza del polo nell'origine pregiudica la BIBO stabilità. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 0$.