Quinto test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 12 Novembre 2009

1. Si traccino i diagrammi di Bode (reali e asintotici) delle ampiezze delle seguenti funzioni di trasferimento e se ne determinino, ove possibile e almeno in modo approssimativo, pulsazione di risonanza, picco di risonanza relativo e banda passante a 3 dB (ogni domanda vale 4 punti):

   (a) $W(s) = \dfrac{s+10}{s^2+0.1s+1}$;

   (b) $W(s) = 10^4\ \dfrac{s+1}{(s+10)(s+100)}$;

   (c) $W(s) = \dfrac{(s-1)^2}{(s^2+10s+100)(s+1)}$;

2. Si traccino i diagrammi di Bode (reali e asintotici) delle seguenti funzioni di trasferimento, e, partire da essi, si traccino in modo approssimativo i corrispondenti diagrammi di Nyquist (ogni domanda vale 4 punti):

   (a) $W(s) = \dfrac{s+1}{s(s+100)}$;

   (b) $W(s) = \dfrac{s}{s^2-10}$;

   (c) $W(s) = \dfrac{s^2+1}{s^2+2s+101}$.

3. Si tracci la risposta al gradino di ciascuno dei seguenti modelli ingresso/uscita, e si determini per ciascuna di esse, almeno in modo approssimativo, tempo di salita (al 10%) e sovraelongazione (se esiste) (ogni domanda vale 4 punti):

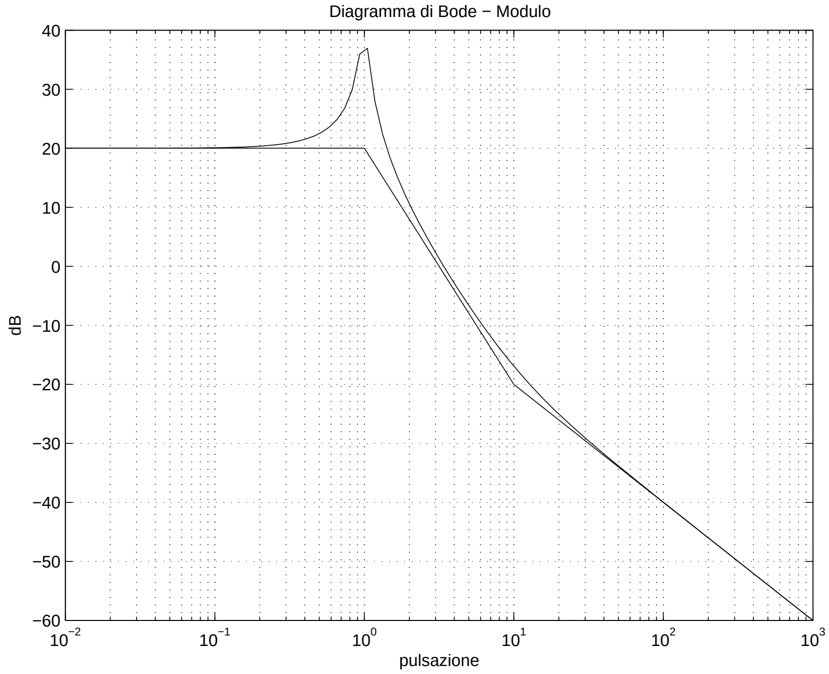
   (a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 22\frac{dy}{dt} + 40y(t) = 11\frac{du}{dt} + 40u(t)$;

   (b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y(t) = 4\frac{du}{dt} + 4u(t)$.

RISPOSTE

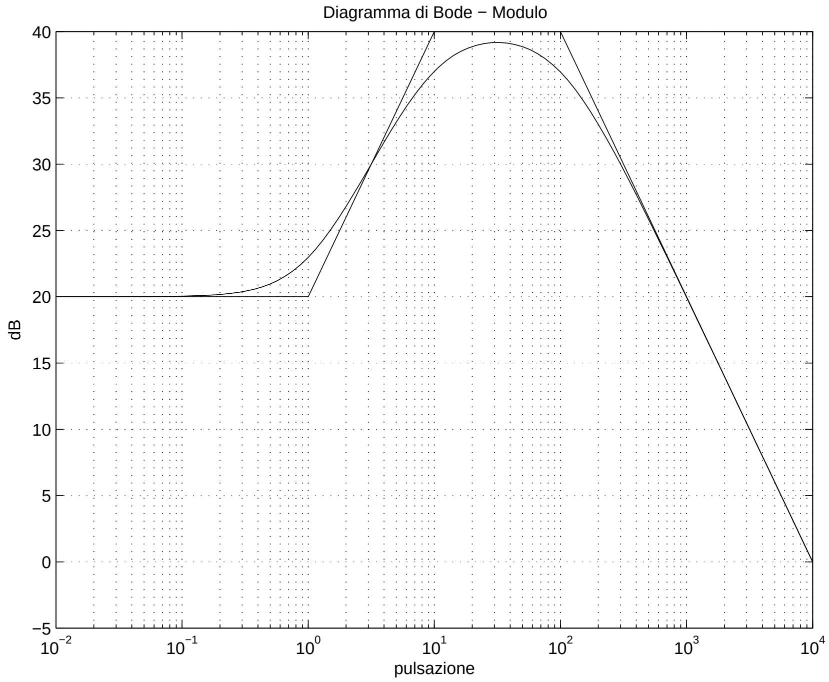
1. Diagrammi di Bode e parametri:

   (a)



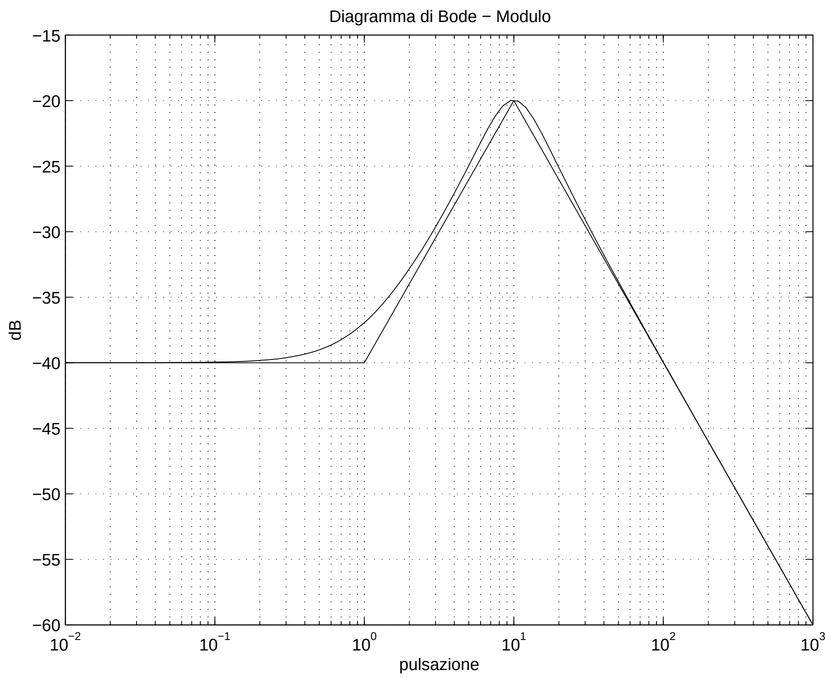
   La pulsazione di risonanza esiste e coincide praticamente con $\omega_n = 1$ rad/s. Il picco di risonanza relativo vale circa 20 dB. Infine, la banda passante a 3 dB assume un valore intermedio tra 1 e 2 rad/s.

   (b)



La pulsazione di risonanza esiste e coincide praticamente con il punto intermedio tra $\omega = 10$ rad/s e $\omega = 10^2$ rad/s, per cui possiamo assumere $\omega_r \approx 10^{3/2}$ rad/s. Il picco di risonanza vale circa 37 dB. Infine, poichè è immediato rendersi conto che il diagramma di Bode delle ampiezze assume valore pari a $|K_B|_{\text{dB}} = 20$ dB in corrispondenza a $\omega = 10^3$ rad/s, la banda passante a 3 dB assume un valore leggermente superiore a 1000 rad/s (si può assumere, in prima approssimazione, 1300 rad/s).

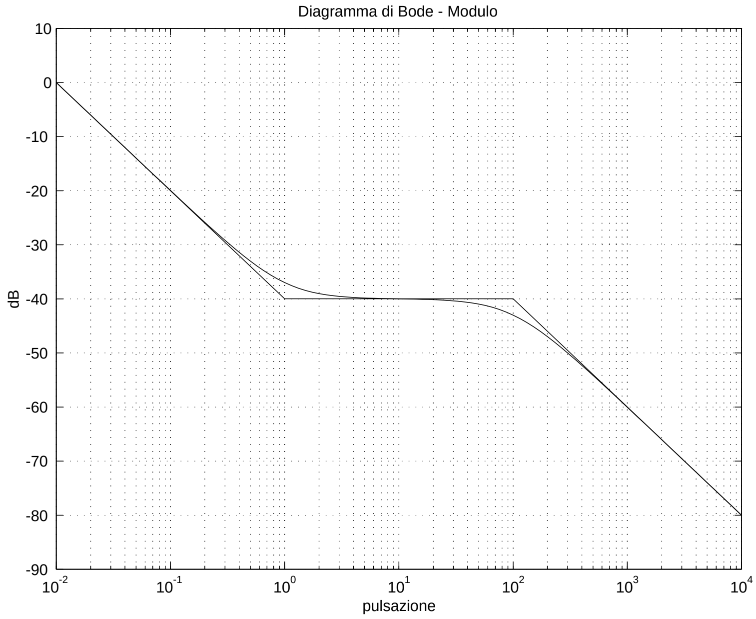
(c)

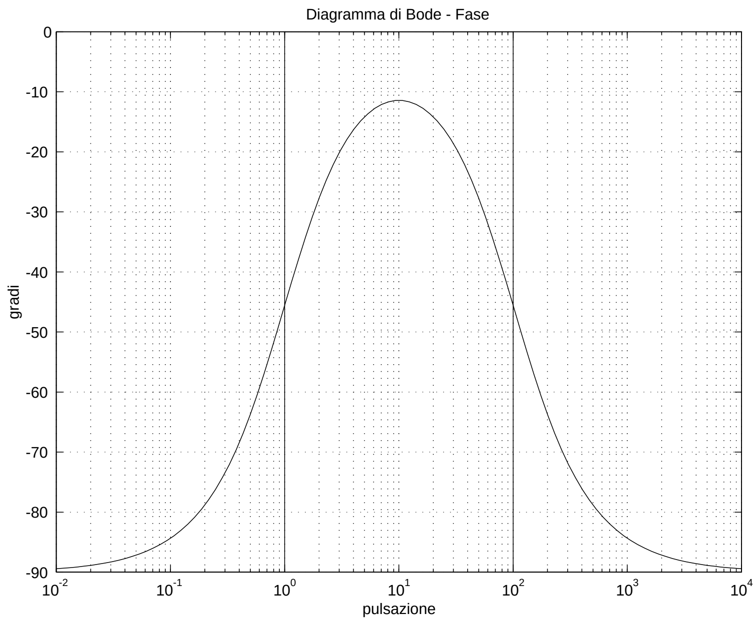


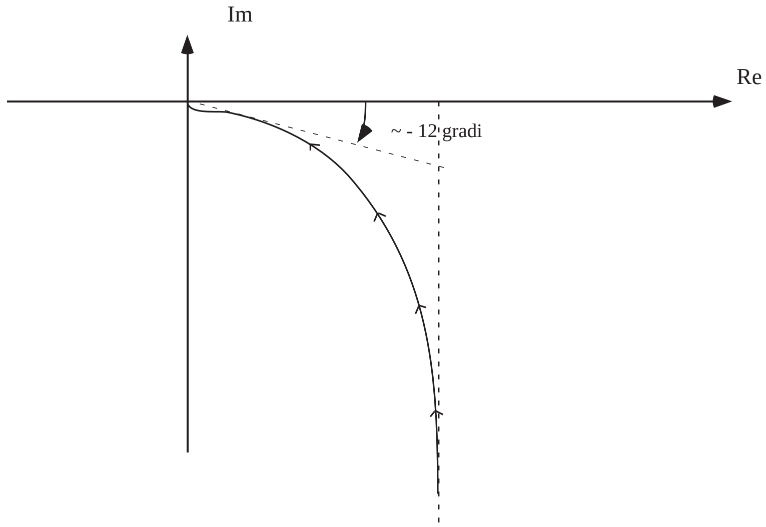
La pulsazione di risonanza esiste e coincide praticamente con $\omega = 10$ rad/s. Il picco di risonanza vale circa 20 dB. Infine, poichè è immediato rendersi conto che il diagramma di Bode delle ampiezze assume valore pari a $|K_B|_{\mathrm{dB}} = -40$ dB in corrispondenza a $\omega = 10^2$ rad/s, la banda passante a 3 dB assume un valore leggermente superiore a 100 rad/s (si puo' assumere, in prima approssimazione, 130 rad/s).

2. Diagrammi di Bode e di Nyquist:

   (a)






Im
Re
~ - 12 gradi

(b)

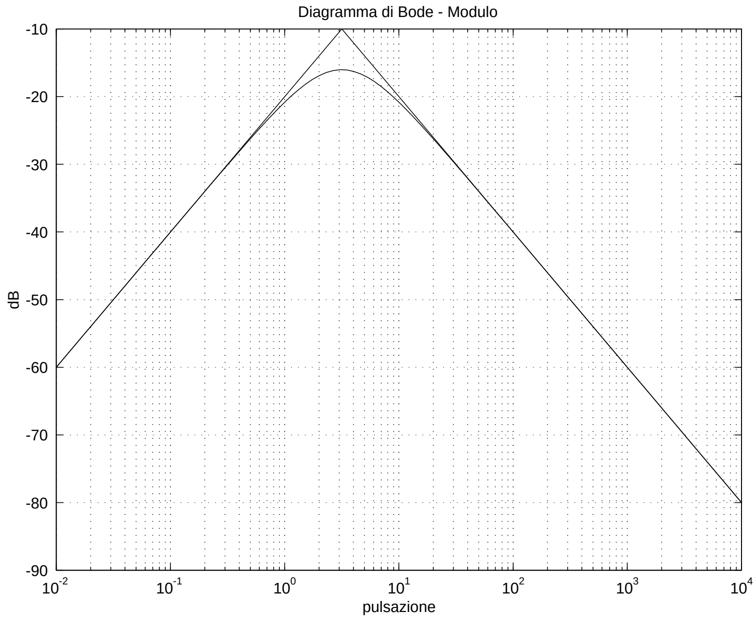


Diagramma di Bode - Modulo
dB
pulsazione
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

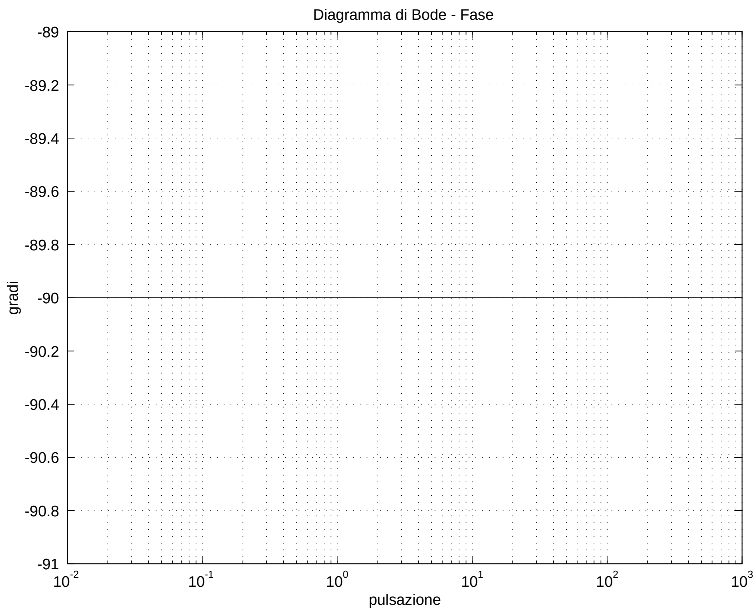
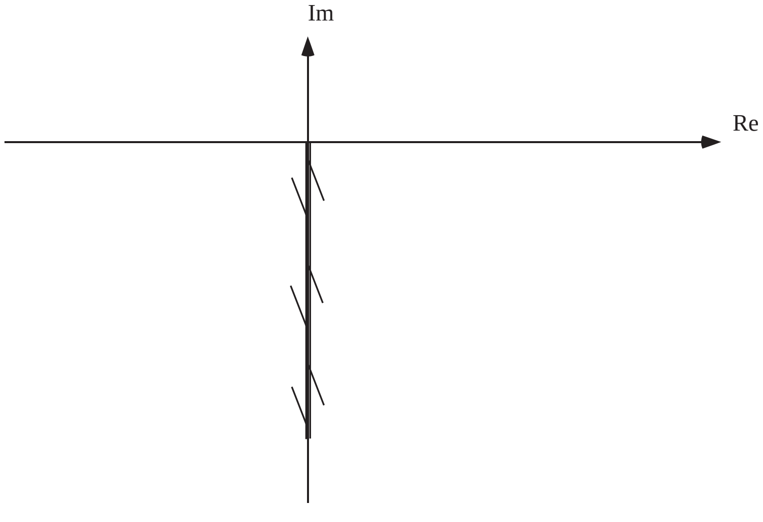


Diagramma di Bode - Fase
-89
-89.2
-89.4
-89.6
-89.8
-90
-90.2
-90.4
-90.6
-90.8
-91
gradi
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
pulsazione



Im
Re

(c)

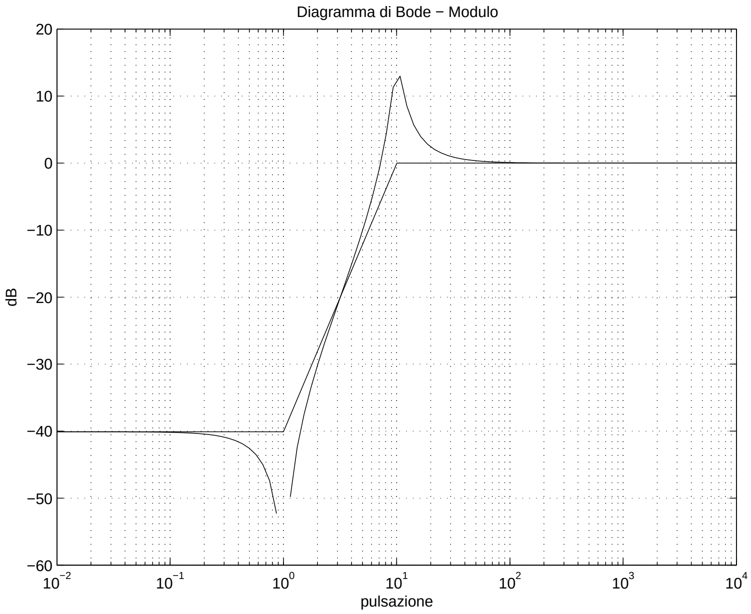


Diagramma di Bode − Modulo
dB
pulsazione
20
10
0
−10
−20
−30
−40
−50
−60
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}

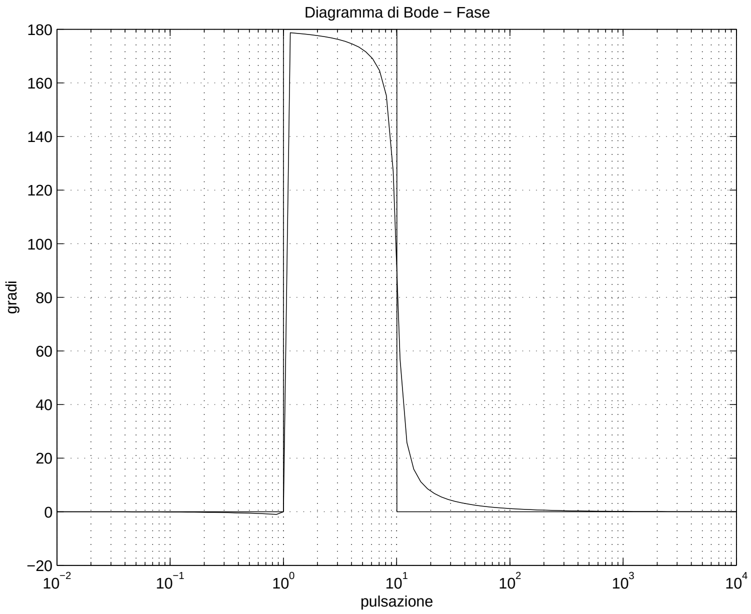
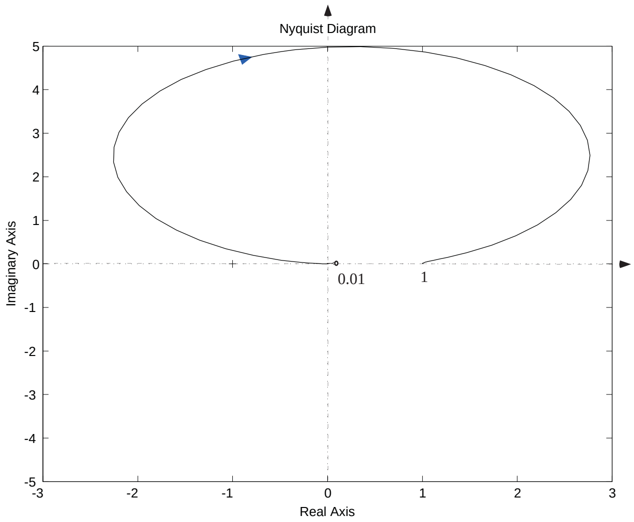


Diagramma di Bode − Fase
gradi
pulsazione
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
−20
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}



3. Risposta al gradino:

   (a) La risposta al gradino è

   $$y_f(t) = \left[1 - 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-20t}\right] \delta_{-1}(t).$$

   La sua derivata vale per $t > 0$

   $$\frac{dy_f}{dt} = e^{-2t} + 10e^{-20t}.$$

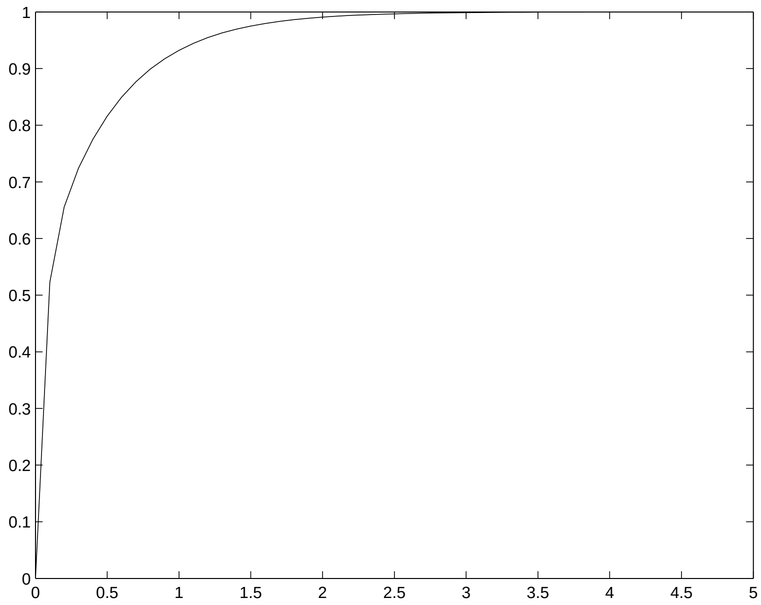
   Chiaramente tale derivata è positiva per ogni $t > 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

   $$y_f(t_r) = 0.9y_\infty = 0.9.$$

   Ricorrendo all'approssimazione

   $$y_f(t) \approx \left[1 - 0.5e^{-2t}\right] \delta_{-1}(t),$$

   (ragionevole dal momento che il modo e^{-20t} si estingue immediatamente se raffrontato con il modo e^{-2t}), si trova, quindi, $t_r = 0.8047$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



(b) La risposta al gradino è

$$y_f(t) = \left[1 - e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\right]\delta_{-1}(t).$$

La sua derivata vale per $t > 0$

$$\frac{dy_f}{dt} = 4e^{-t}\cos(\sqrt{3}t).$$

Chiaramente tale derivata è inizialmente positiva, e si annulla in corrispondenza a tutti i punti $t_k, k \in \mathbb{N}$, per cui $\sqrt{3}t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ovvero per $t_k = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + k\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, con k intero positivo. Pertanto la risposta al gradino ha un andamento oscillatorio. Per valutare la sovraelongazione è necessario valutare il punto di massimo della risposta a gradino che certamente sarà $y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$. Si trova

$$y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)},$$

da cui segue che $s = \frac{y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)-1}{1} \cdot 100\% = \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)} \cdot 100\% = 70\%$. Poiché la massima sovraelongazione è superiore al 70%, ne consegue che tempo di salita e tempo di assestamento al 10% non coincidono. Il tempo di salita si trova determinando il più piccolo istante t_r per cui

$$y_f(t_r) = 0.9y_\infty = 0.9.$$

Poiché una stima esatta risulta computazionalmente complessa, possiamo ricorrere ad un'approssimazione. Valutiamo l'istante t_1 in cui $y_f(t_1) = 1$. Poiché l'andamento dlla risposta al gradino è inizialmente molto ripido, tale valore è un'approssimazione accettabile di t_r. Si impone, quindi,

$$1 = y_f(t_1) = 1 - e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1) + \sqrt{3}e^{-t_1}\sin(\sqrt{3}t_1),$$

da cui segue

$$0 = -e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1) + \sqrt{3}e^{-t_1}\sin(\sqrt{3}t_1),$$

ovvero

$$0 = -2e^{-t_1}\left[\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t_1)\right] = -2e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1 + \pi/3),$$

che porta a

$$0 = \cos(\sqrt{3}t_1 + \pi/3)$$

ovvero

$$\sqrt{3}t_1 + \pi/3 = \frac{\pi}{2},$$

da cui $t_r \approx t_1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0.3$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente: