Sesto test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Con riferimento ai sistemi a tempo discreto del tipo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t), \qquad t \geq 0,$$

presi in esame nel seguito, si studi la raggiungibilità e si determinino esplicitamente i sottospazi di raggiungibilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$:

(a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

(b) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

(c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

2. Con riferimento ai sistemi a tempo discreto del tipo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t), \qquad t \geq 0,$$

presi in esame nel seguito, si studi la controllabilità e si determinino esplicitamente i sottospazi di controllabilità in k passi per ogni $k \in \mathbb{N}$:

(a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

(b) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

(c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

3. Con riferimento ai sistemi a tempo discreto del tipo

$$\mathbf{x}(t+1) = F\mathbf{x}(t) + G\mathbf{u}(t), \qquad t \geq 0,$$

presi in esame nel seguito, si progetti, se possibile, un ingresso di controllo $\mathbf{u}(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale assegnato allo stato finale assegnato. In caso negativo, si giustifichi adeguatamente la risposta:

(a)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(b)

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(c)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

4. Si discuta, al variare di a in $\mathbb{R}$, la raggiungibilità e la controllabilità dei modelli di stato a tempo discreto descritti dalle seguenti coppie di matrici:

(a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

(b) $F = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$

(c) $F = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1-a \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$

RISPOSTE

1. Sottospazi di raggiungibilità:

   (a) Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\, G \quad FG \,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^R &= \mathrm{Im}\,[\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = X_2^R.
\end{aligned}$$

   Pertanto il sistema non è raggiungibile e gli stati raggiungibili possono essere raggiunti in al più due passi.

   (b) Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\, G \quad FG \,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3 \\
X_3^R &= X_2^R.
\end{aligned}$$

   Pertanto il sistema è raggiungibile in due passi.

   (c) Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^R &= \mathrm{Im} G = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^R &= \mathrm{Im}\,[\, G \quad FG \,] = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3 \\
X_3^R &= X_2^R.
\end{aligned}$$

   Pertanto il sistema è raggiungibile in due passi.

2. Sottospazi di controllabilità:

   (a) Si trova

$$\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im} G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : 2x_3 = x_2 - x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \mathbb{R}^3 \\
X_3^C &= X_2^C.
\end{aligned}
$$

Pertanto il sistema (che non è raggiungibile) è controllabile a zero in due passi.

(b) Si trova

$$
\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 = x_2 = 0 \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_3 \\ 2x_2 - x_3 \\ -2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_3 = 0 \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \\
X_3^C &= \{\mathbf{x} : F^3\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2x_2 - x_3 \\ -2x_2 + 3x_3 \\ 6x_2 - 5x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

Pertanto il sistema (che è raggiungibile) è controllabile a zero in tre passi.

(c) Si trova

$$
\begin{aligned}
X_1^C &= \{\mathbf{x} : F\mathbf{x} \in \mathrm{Im}G\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 - x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 + x_2 = x_3 - x_1 - x_2 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle \\
X_2^C &= \{\mathbf{x} : F^2\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG\,]\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathbb{R}^3.
\end{aligned}
$$

Pertanto il sistema (che è raggiungibile) è controllabile a zero in due passi.

3. Controllo da generico stato iniziale a generico stato finale:

(a) Il problema ha soluzione se e solo se

$$\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im}[\,G \quad FG\,] = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Chiaramente il problema ha soluzione. Impostando l'equazione

$$\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) = [\,G \quad FG\,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

si trova la soluzione $u(0) = -1, u(1) = 1$.

(b) Il problema ha soluzione se e solo se

$$\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im}[\,G \quad FG\,] = \mathbb{R}^3.$$

Chiaramente il problema ha soluzione. Impostando l'equazione

$$\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) = [\,G \quad FG\,] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix},$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(1) \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix},$$

si trovano infinite soluzioni, tra cui, ad esempio, la soluzione $\mathbf{u}(0) = [2 \;\; 0]^T, \mathbf{u}(1) = [-1 \;\; -4]^T$.

(c) Il problema ha soluzione se e solo se

$$\mathbf{x}(2) - F^2\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im}[\,G \quad FG\,] = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

Chiaramente il problema non ha soluzione.

4. Raggiungibilità e controllabilità a zero al variare del parametro a:

(a) La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed ha rango pieno se e solo se $a \neq 0$. Pertanto per $a \neq 0$ si ha raggiungibilità e, di conseguenza, controllabilità a zero. Per $a = 0$,

$$X^R = \operatorname{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

mentre

$$\mathrm{Im}F^3 = \mathrm{Im}F = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Pertanto

$$\mathrm{Im}F^3 \not\subseteq X^R$$

e il sistema non è nemmeno controllabile a zero.

(b) La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \begin{bmatrix} -1 & -1-a & -a-a^2+1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e non ha mai rango pieno (le ultime due righe sono l'una l'opposto dell'altra). Pertanto per ogni valore di a non c'è raggiungibilità. Tuttavia va osservato che per $a \neq -2$ il rango di $\mathcal{R}$ è pari a 2 e

$$X^R = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1-a \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

mentre per $a = -2$ il rango di $\mathcal{R}$ è pari a 1 e

$$X^R = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

Per quanto concerne la controllabilità a zero, si trova

$$\mathrm{Im}F^3 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per $a = 0$ si trova

$$\mathrm{Im}F^3 = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle \subset \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e si ha quindi la controllabilità a zero. Per $a = -2$ si trova

$$\mathrm{Im}F^3 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle \not\subset \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle,$$

mentre per $a \neq 0, -2$,

$$\mathrm{Im}F^3 = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Pertanto si ha controllabilità a zero per ogni valore di a diverso da -2.

(c) La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+a & (1-a)a & 1+2a & 2(1-a)a \\ 1 & 1-a & 1 & 1-a & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e non ha mai rango pieno. Pertanto per ogni valore di a non c'è raggiungibilità. Si noti, tuttavia, che per ogni valore di $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$X^R = \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

Per quanto concerne la controllabilità a zero, si trova

$$\mathrm{Im}F^3 = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq \mathrm{Im}\mathcal{R} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

e si ha quindi sempre la controllabilità a zero.