Sesto test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 24 Novembre 2009

1. Con riferimento alle seguenti funzioni di trasferimento

   (a) $W(s) = \dfrac{s+5}{(1+s)(10+s)}$;

   (b) $W(s) = \dfrac{s+10}{(s+2)(s+5)}$;

   (c) $W(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)^2}$,

   se ne determini il tipo k e, in corrispondenza al segnale canonico $\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$, si determini l'errore di regime permanente

   $$e_{rp}^{(k)} := \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t) - y^{(k)}(t) \right],$$

   (dove $y^{(k)}(t)$ rappresenta la risposta forzata del sistema al segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) := \frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$) con cui risponde il sistema (la domanda (a) vale 1 punto, la domanda (b) 2 punti, la domanda (c) 3.5 punti).

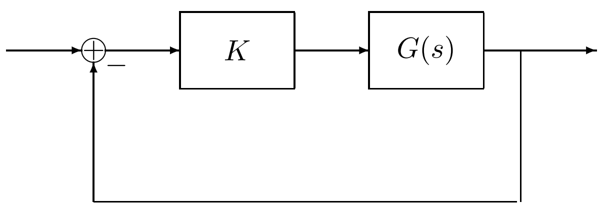
2. Con riferimento alle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, interpretate come le funzioni di trasferimento di un processo a tempo continuo lineare, tempo-invariante e SISO,

   (a) $G(s) = \dfrac{s-1}{s^3+3s^2+2}$;

   (b) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^3+s^2+2s-10}$;

   (c) $G(s) = \dfrac{s^3}{s^3+5s^2+3s+1}$.

   si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato



   risulta BIBO stabile (ogni domanda vale 2.5 punti).

3. Per ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, si tracci il diagramma di Nyquist completo (per $\omega \in \mathbb{R}$) e si determini (ove possibile ed eventualmente riportando tali diagrammi al finito) il numero N di giri che il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ e, il numero di poli a parte reale positiva della funzione $W(s)$, ottenuta da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa.

   (a) $G(s) = \dfrac{s^2}{(s-1)^2}$;

   (b) $G(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s+10)}$;

   (c) $G(s) = \dfrac{5}{(s+1)s}$;

   (d) $G(s) = \dfrac{s-10}{s^2(s+1)}$.

   (Ogni domanda vale 4 punti.)

RISPOSTE

1. Tipo ed errore di regime permanente:

   (a) $W(0) = \frac{5}{10} = 0.5$ pertanto il sistema è di tipo 0 e l'errore di regime permanente al gradino è $e_{rp} = \lim_{t\to+\infty} \delta_{-1}(t) - W(0)\delta_{-1}(t) = 1 - W(0) = 0.5$.

   (b) $W(0) = \frac{10}{2\cdot 5} = 1$, mentre $\frac{dW(0)}{ds} = -0.6$. Pertanto il sistema è di tipo 1 e l'errore di regime permanente alla rampa lineare $\delta_{-2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$ è

   $$e_{rp} = \lim_{t\to+\infty} [t \cdot \delta_{-1}(t) - [-0.6 + t]\delta_{-1}(t)] = 0.6 = -\frac{dW(0)}{ds}.$$

   (c) $W(0) = 1$, $\frac{dW(0)}{ds} = 0$ mentre $\frac{d^2W(0)}{ds^2} = -2$. Consideriamo la (trasformata di Laplace della) risposta del sistema a tale segnale:

   $$Y(s) = W(s)\frac{1}{s^3} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s^2} + \frac{A_2}{s^3} + \frac{n(s)}{(s+1)^2}.$$

   Sappiamo che

   $$\begin{aligned}
   A_2 &= \lim_{s\to 0} Y(s)\cdot s^3 = \lim_{s\to 0} W(s) = W(0) = 1 \\
   A_1 &= \lim_{s\to 0} \left(Y(s) - \frac{A_2}{s^3}\right)\cdot s^2 = \lim_{s\to 0} \frac{W(s) - W(0)}{s} = \frac{dW(0)}{ds} = 0 \\
   A_0 &= \lim_{s\to 0} \left(Y(s) - \frac{A_2}{s^3} - \frac{A_1}{s^2}\right)\cdot s = \lim_{s\to 0} \left(\frac{W(s)}{s^3} - \frac{W(0)}{s^3}\right)\cdot s = \lim_{s\to 0} -\frac{1}{(s+1)^2} = -1.
   \end{aligned}$$

   Di conseguenza l'errore di regime permanente alla rampa parabolica $\delta_{-3}(t) = \frac{t^2}{2!}\cdot\delta_{-1}(t)$ è

   $$e_{rp} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{2!}\cdot\delta_{-1}(t) - \left[-1 + \frac{t^2}{2!}\right]\delta_{-1}(t) = 1 = -\frac{1}{2!}\frac{d^2W(0)}{ds^2}.$$

2. Stabilità di sistemi retroazionati con guadagno K variabile:

   (a) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + 3s^2 + 2) + K(s-1) = s^3 + 3s^2 + Ks + (2-K)$:

   $$\begin{array}{c|cc}
   3 & 1 & \text{K} \\
   2 & 3 & \text{2-K} \\
   1 & \dfrac{4K-2}{3} & 0 \\
   0 & \text{2-K} & 0
   \end{array}$$

   Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $\frac{1}{2} < K < 2$.

(b) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + s^2 + 2s - 10) + K(s + 2) = s^3 + s^2 + (K + 2)s + (2K - 10)$:

3	1	K +2
2	1	2K-10
1	12 - K	0
0	2K-10	0

Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $5 < K < 12$.

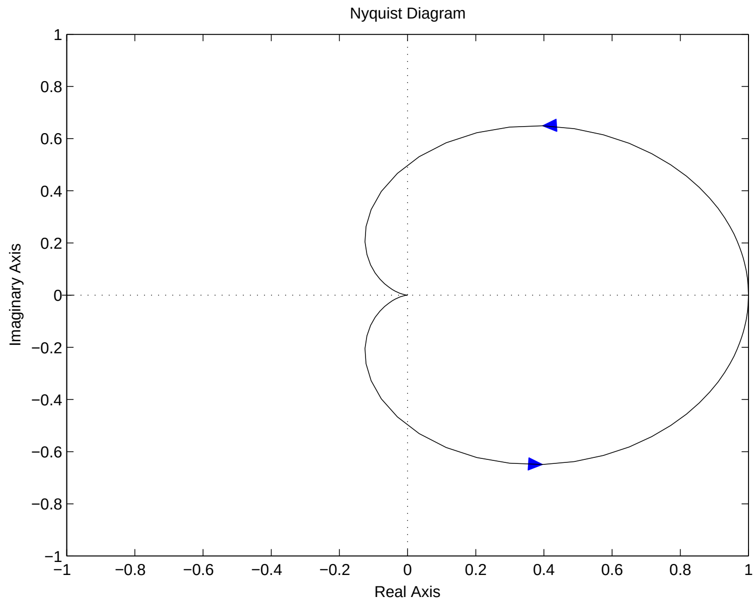
(c) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + 5s^2 + 3s + 1) + Ks^3 = (1 + K)s^3 + 5s^2 + 3s + 1$:

3	1+K	3
2	5	1
1	$\frac{14-K}{5}$	0
0	1	0

Per $K \neq -1$ il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $-1 < K < 14$. Per $K = -1$ si noti che il sistema retroazionato non è proprio e per esso non ha nemmeno senso porsi il problema ddella BIBO stabilità. Infatti $W(s) = \frac{s^3}{5s^2+3s+1}$.

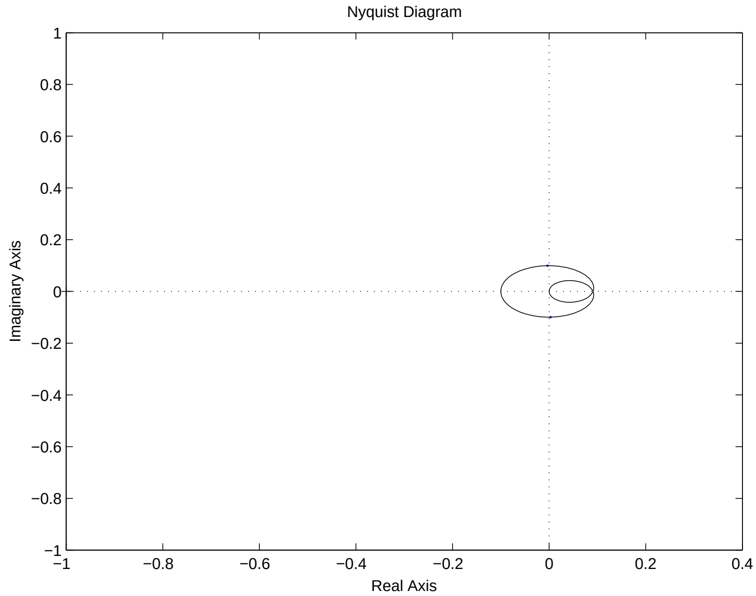
3. Criterio di Nyquist:

   (a) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



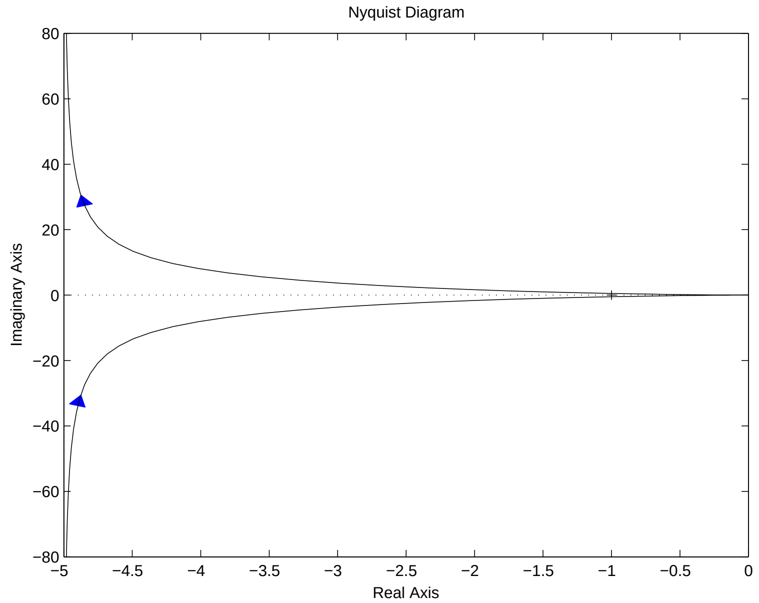
Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dall'origine (per $\omega = 0^+$), con fase π, e arriva nel punto 1, sul semiasse reale positivo, con fase 2π (ovvero nulla), per $\omega = +\infty$, ruotando in verso antiorario. Poichè $n_{G+} = 2$ e $N = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 2$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta 2 poli a parte reale positiva.

(b) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



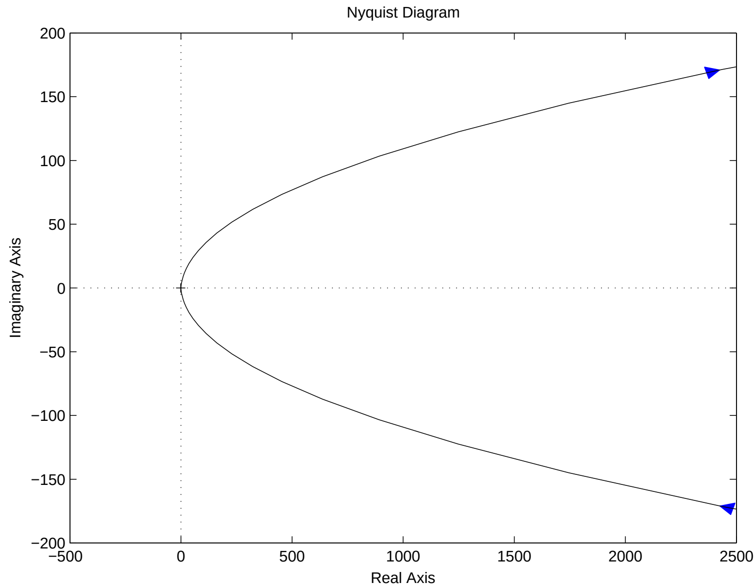
Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto -0.1, sul semiasse reale negativo, (per $\omega = 0^+$) con fase π, e arriva nell'origine, con fase $-\pi/2$, per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e $N = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 0$ e quindi il sistema retroazionato è BIBO stabile.

(c) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto improprio (per $\omega = 0^+$), con fase $-\pi/2$, e arriva nell'origine, con fase $-\pi$, per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e, una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito, con una semicirconferenza dal punto di pulsazione $-\varepsilon$ al punto di pulsazione ε, che descrive un angolo, in verso orario, di π radianti, si trova $N = 0$. Ne consegue, quindi, che $n_{W+} = 0$ e quindi il sistema retroazionato è BIBO stabile.

(d) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto improprio (per $\omega = 0^+$), con fase nulla, e arriva nell'origine, con fase $-\pi$ (ciò non si nota in figura per motivi numerici), per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e, una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito, con una circonferenza dal punto di pulsazione $-\varepsilon$ al punto di pulsazione ε, che descrive un angolo, in verso orario, di 2π radianti, si trova $N = -1$. Ne consegue, quindi, che $n_{W+} = 1$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta 1 polo a parte reale positiva.