Settimo test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2007/2008

1. Si studi la raggiungibilità dei seguenti modelli di stato e, nel caso in cui il sistema non sia raggiungibile, si determinino gli autovalori del sottosistema non raggiungibile (senza calcolare esplicitamente la forma standard di raggiungibilità del sistema) (ogni domanda vale 2.5 punti):

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

   ....

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$

   ....

   (c) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

   ....

2. Si calcoli la forma standard di raggiungibilità del sistema assegnato (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$

   ....

   (b) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$

   ....

   (c) $F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

   ....

3. Si discuta al variare di $a \in \mathbb{R}$ la raggiungibilità del sistema descritto dalla coppia di matrici F e G assegnate, senza calcolare esplicitamente la matrice di raggiungibilità del sistema (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$

   ....

(b) $F = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix};$

....

(c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$

....

4. Si determini, se esiste, la forma canonica di controllo dei sistemi ad un solo ingresso descritti dalle seguenti coppie (F, G) e si determini la matrice T di cambiamento di base (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

   ....

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

   ....

RISPOSTE

1. Raggiungibilità ed eventuali autovalori del sottosistema non raggiungibile:

   (a) È immediato rendersi conto del fatto che il sistema si trova già in forma standard di raggiungibilità, in virtù della struttura triangolare a blocchi e del fatto che la coppia

   $$(F_{11}, G_1) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

   è raggiungibile. Inoltre la matrice del sottosistema non raggiungibile è $F_{22} = [0]$. Pertanto il sistema non è raggiungibile e l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile è l'autovalore nullo.

   (b) È immediato verificare che la matrice di raggiungibilità

   $$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   ha rango 2. Pertanto il sistema non è raggiungibile e il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 1, ovvero F_{22} è uno scalare. Per determinare F_{22} o, equivalentemente, il suo unico autovalore, andiamo a valutare preliminarmente gli autovalori della matrice F e successivamente valutiamo la matrice PBH di raggiungibilità in corrispondenza a tali autovalori. Si trova

   $$\sigma(F) = (1, 1, -2).$$

   Valutando la matrice PBH in corrispondenza a $s = 1$ si trova

   $$[\, sI_3 - F \quad | \quad G\,]|_{s=1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

   che chiaramente ha rango 2. Pertanto $F_{22} = 1$. Si noti che 1 è sia autovalore del sottosistema non raggiungibile che autovalore del sottosistema raggiungibile.

   (c) È immediato verificare che la matrice di raggiungibilità

   $$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   ha rango 2. Pertanto il sistema non è raggiungibile e il sottosistema non raggiungibile ha dimensione 1, ovvero F_{22} è uno scalare. Per determinare F_{22} o, equivalentemente, il suo unico autovalore, andiamo a valutare preliminarmente gli autovalori della matrice F e successivamente valutiamo la matrice PBH di raggiungibilità in corrispondenza a tali autovalori. Si trova

   $$\sigma(F) = (0, 1, 2).$$

   Valutando la matrice PBH in corrispondenza a $s = 0$ si trova

   $$[\, sI_3 - F \quad | \quad G\,]|_{s=0} = \left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   che chiaramente ha rango 2. Pertanto $F_{22} = 0$.

2. Forma standard di raggiungibilità:

   (a) Osserviamo preliminarmente che, nonostante la struttura triangolare a blocchi, la coppia (F, G) non è in forma standard di raggiungibilità, dal momento che la coppia (F_{11}, G_1) non è raggiungibile. Il sottospazio raggiungibile del sistema è:

$$X^R = \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle.$$

   Costruiamo come matrice di cambiamento di base la matrice ottenuta prelevando (le coordinate di) un generatore per X^R, ovvero una colonna (non nulla) di $\mathcal{R}$, e aggiungendo ad esso due vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti da esso:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Poiché

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T,$$

   si trova

$$T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (b) Il sottospazio raggiungibile del sistema è:

$$X^R = \mathrm{Im}\,[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle.$$

   Costruiamo come matrice di cambiamento di base la matrice ottenuta prelevando (le coordinate di) due generatori per X^R e aggiungendo ad essi un vettore di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendente da essi:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Poiché

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

   si trova

$$T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Il sottospazio raggiungibile del sistema è:

$$\begin{aligned} X^R &= \operatorname{Im}[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \operatorname{Im}[\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Costruiamo come matrice di cambiamento di base la matrice ottenuta prelevando (le coordinate di) due generatori per X^R e aggiungendo ad essi un vettore di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendente da essi:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si trova

$$T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Raggiungibilità al variare le parametro a:

   (a) Osserviamo in primo luogo che la matrice F, per ogni scelta di a, è in forma di Jordan. Possiamo, pertanto applicare il criterio di raggiungibilità per sistemi la cui matrice di sistema sia in forma canonica di Jordan. Distinguiamo i seguenti casi: 1) $a = 0$, 2) $a = 1$, 3) $a = 2$ e 4) $a \neq 0, 1, 2$.

   Caso 1): osservando le righe della matrice G realizziamo subito che, per $a = 0$, la matrice PBH di raggiungibilità perde rango per $s = 0$, dal momento che la riga di G corrispondente al miniblocco di Jordan relativo a $\lambda = 0$ è la riga nulla. Pertanto per $a = 0$ il sistema non è raggiungibile.

   Caso 2): per $a = 1$ abbiamo due miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi al medesimo autovalore $\lambda = 1$. Osservando le corrispondenti righe della matrice G realizziamo subito che esse sono identiche e pertanto la matrice PBH di raggiungibilità perde rango per $s = 1$. Ma allora per $a = 1$ il sistema non è raggiungibile.

   Caso 3): per $a = 2$ abbiamo due miniblocchi di Jordan di dimensione a1 relativi al medesimo autovalore $\lambda = 2$. Osservando le corrispondenti righe della matrice G realizziamo subito che esse sono linearmente indipendenti e, analogamente, la riga di G corrispondente al miniblocco relativo all'autovalore 1 è non nulla. Ma allora la matrice PBH di raggiungibilità non perde mai rango e il sistema è raggiungibile.

   Caso 4): per $a \neq 0, 1, 2$ abbiamo 3 miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi a tre autovalori distinti. Le corrispondenti righe della matrice G sono tutte non nulle e pertanto la matrice PBH di raggiungibilità non perde mai rango e il sistema è raggiungibile.

   (b) Distinguiamo solo due casi: $a = 0$ e $a \neq 0$.

   Per $a = 0$ abbiamo due miniblocchi di Jordan di dimensione 1 relativi al medesimo autovalore $\lambda = 1$. Osservando le corrispondenti righe della matrice G realizziamo subito che esse sono identiche e pertanto (criterio di raggiungibilità nel caso in cui la matrice F sia in forma di Jordan) la matrice PBH di raggiungibilità perde rango per $s = 1$. Ma allora per $a = 0$ il sistema non è raggiungibile.

Per $a \neq 0$, invece, se andiamo a valutare il rango della matrice PBH di raggiungibilità, vediamo subito che essa ha rango 3 sia per $s = 1$ che per $s = a$ (sia che essi coincidano sia che essi siano distinti). Pertanto il sistema è raggiungibile.

Si noti che nel caso $a \neq 0$ si potevano distinguere due ulteriori sottocasi la cui analisi portava però alle medesime conclusioni: il caso $a = 1$ e il caso $a \neq 0, 1$. Per $a = 1$, infatti, abbiamo due miniblocchi di Jordan relativi all'autovalore 1 e le corrispondenti righe della matrice G, ovvero $[\,1 \quad 0\,]$ e $[\,1 \quad 1\,]$, sono linearmente indipendenti, garantendo in tal modo (criterio di raggiungibilità nel caso in cui la matrice F sia in forma di Jordan) la raggiungibilità. Per $a \neq 0, 1$ possiamo ricorrere al semplice PBH e verificare che il rango tiene in corrispondenza ai due autovalori distinti $\lambda = 1$ e $\lambda = a$.

(c) La matrice F ha un solo autovalore $\lambda = 0$. Se valutiamo la matrice PBH di raggiungibilità per $s = 0$ osserviamo che la matrice $0I_3 - F = -F$ ha rango 1, pertanto l'unica speranza è che per qualche valore di a le due colonne di G risultino linearmente indipendenti dallo spazio vettoriale generato dalle colonne di $-F$. Ciò si verifica se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -a & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 - a \neq 0,$$

ovvero se e solo se $a \neq 1$. Di conseguenza il sistema è raggiungibile per ogni valore di a diverso da 1.

4. Forma canonica di controllo e matrice di cambio di base T:

se (F, g), con $F \in \mathbb{R}^3$ e $g \in \mathbb{R}^3$, è una coppia raggiungibile da un solo ingresso, il calcolo della forma canonica di controllo richiede solo il calcolo dei coefficienti del polinomio caratteristico,

$$\Delta_F(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0,$$

dal momento che la forma canonica di controllo è

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, \qquad g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il calcolo della matrice di cambio di base può essere effettuato sfruttando l'identità

$$\mathcal{R}_c = T^{-1}\mathcal{R},$$

ovvero

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1}.$$

(a) La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [\,G \quad FG \quad F^2G\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango pieno. Pertanto il sistema è raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(s) = (s^2+1)(s-1) = s^3 - s^2 + s - 1,$$

e la forma canonica di controllo è

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice T è

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) La matrice di raggiungibilità del sistema è:

$$\mathcal{R} = [\, G \quad FG \quad F^2G \,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed ha rango pieno. Pertanto il sistema è raggiungibile. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(s) = (s-1)^2(s+1) = s^3 - s^2 - s + 1,$$

e la forma canonica di controllo è

$$F_c = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad g_c = T^{-1}g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice T è

$$T = \mathcal{R}\mathcal{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$