Settimo test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI A.A. 2009/2010

Data: 2 Dicembre 2009

1. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) al più pari ad 0.1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10^3$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

2. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

3. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa lineare) al più di 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

4. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) all'incirca pari a 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10000$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

5. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{1 + s},$$

si progetti un controllore $C(s)$ di tipo PI (proporzionale integrativo), e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) all'incirca pari a 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

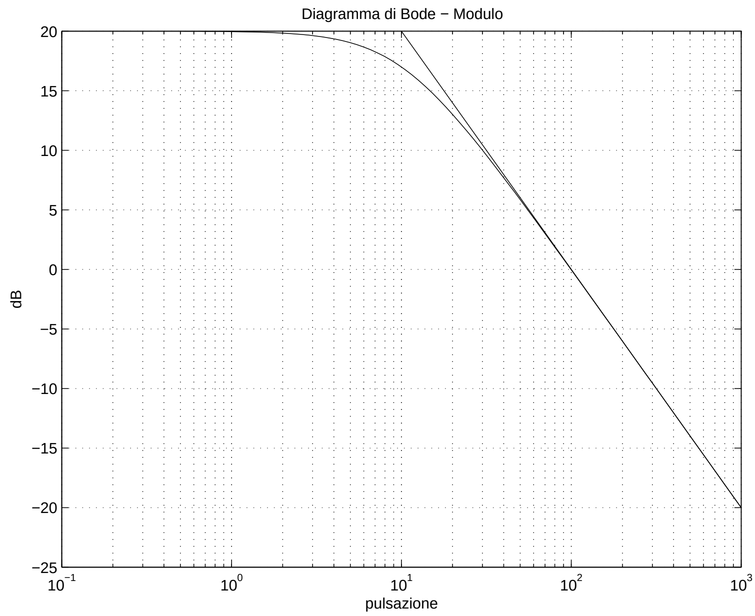
RISPOSTE

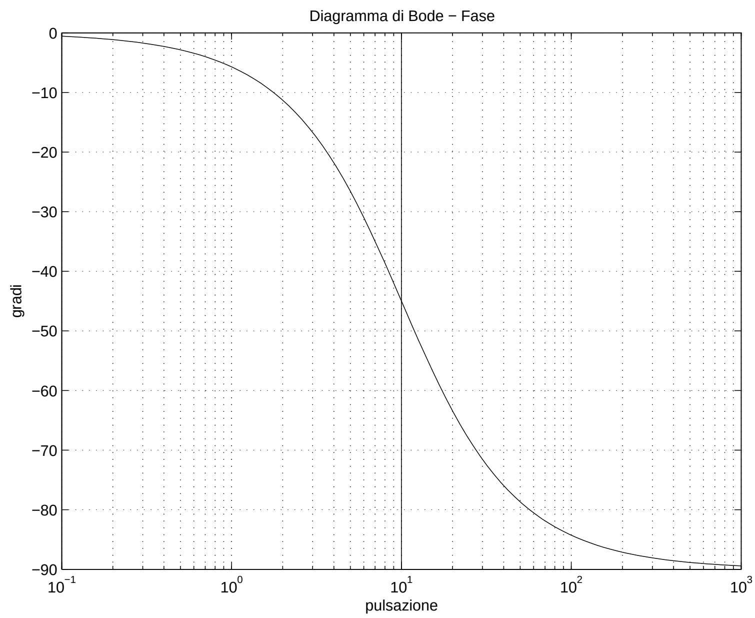
1. Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)10} \leq 0.1$$

da cui segue $K_B(C) \geq 0.9$. Prendiamo $K_B(C) = 1$ a cui corrisponde $C'(s) = 1$.

I diagrammi di Bode di $G(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

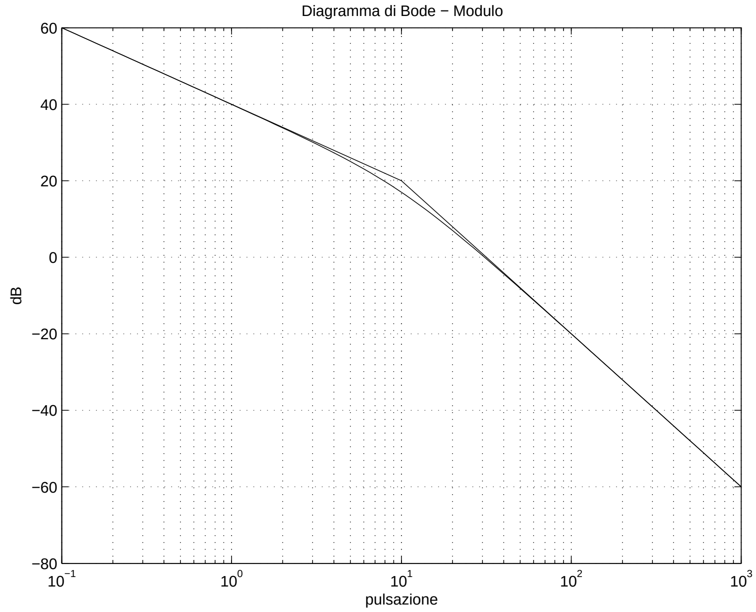


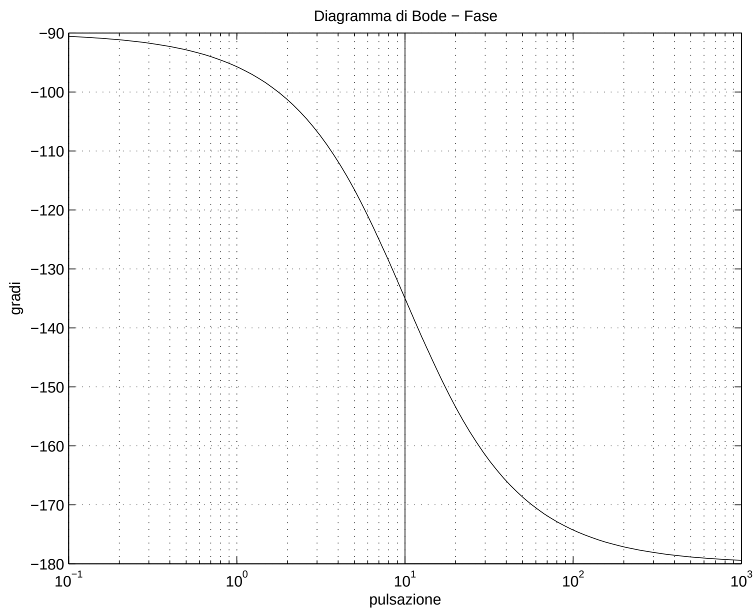


Applicando un'azione puramente proporzionale, ovvero moltiplicando la funzione per una costante moltiplicativa (di valore 10), in modo tale da sollevare il solo diagramma delle ampiezze di 20 dB, otteniamo il soddisfacimento dei vincoli ii) e iii).

2. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo semplice nell'origine. Non essendoci vincoli sull'errore di regime permanente alla rampa lineare, possiamo assumere $C'(s) = \frac{1}{s}$.

   I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)}$ sono i seguenti:



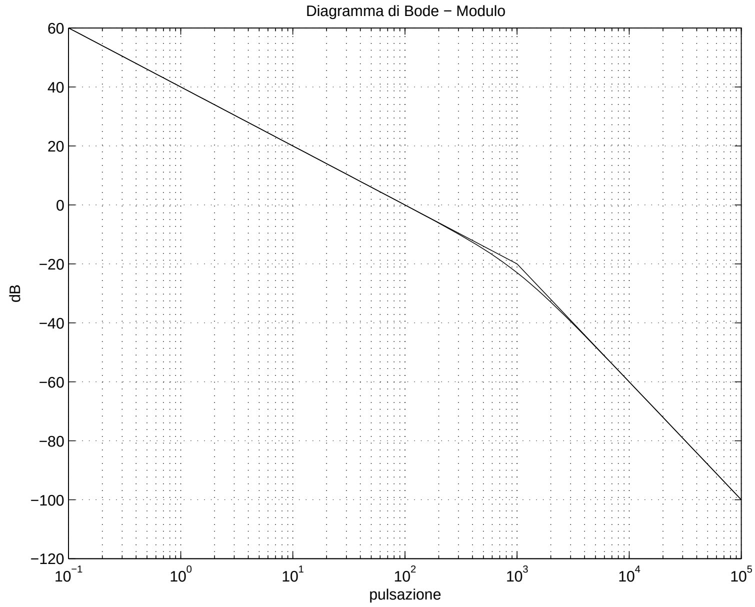


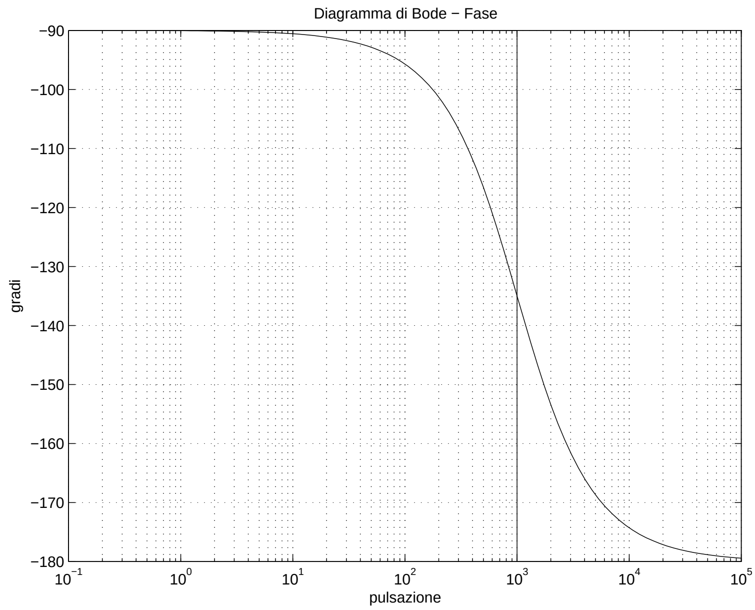
   Si trova $10^{3/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 10^2$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $5° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno 40°.

   Di fatto a questo risultato è possibile pervenire cancellando il polo in -10 e sostituendolo con un polo a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot C_{ant}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.001s}$$

il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode

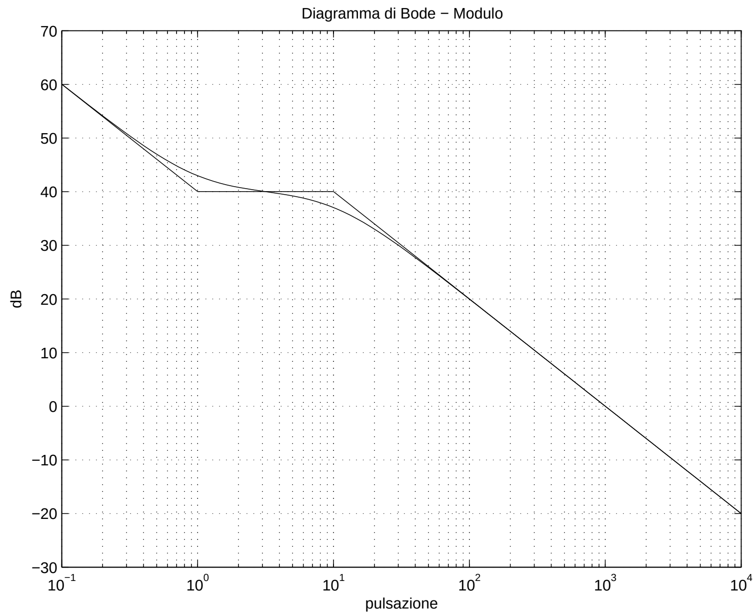


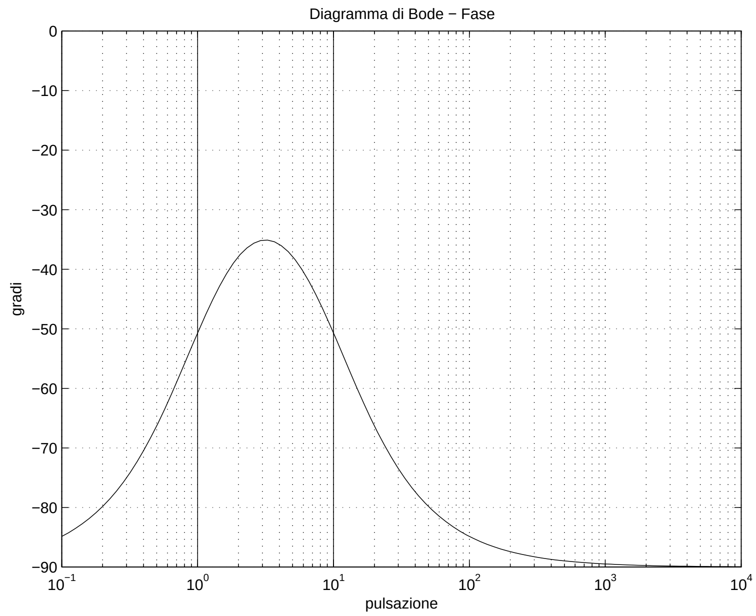


3. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo semplice nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)10} \leq 0.01$$

da cui segue $K_B(C) \geq 10$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{10}{s}$.
I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s) = 100\ \frac{1+s}{s(1+0.1s)}$ sono i seguenti:



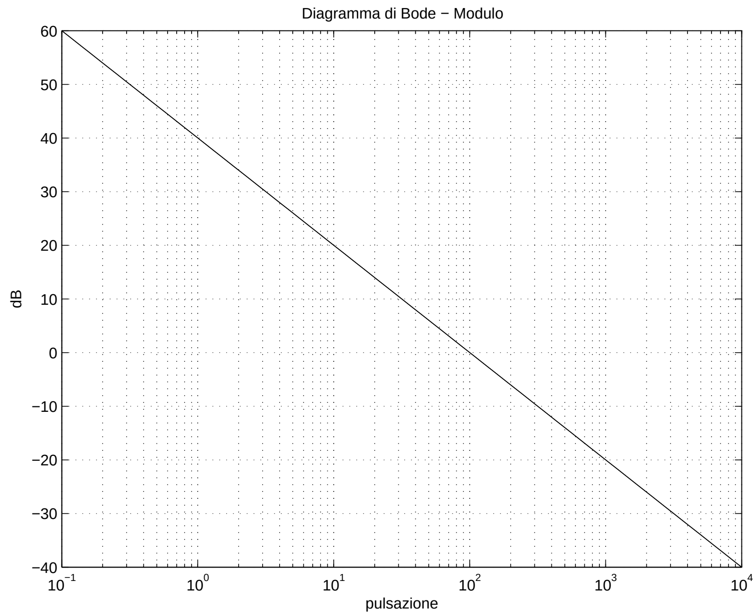


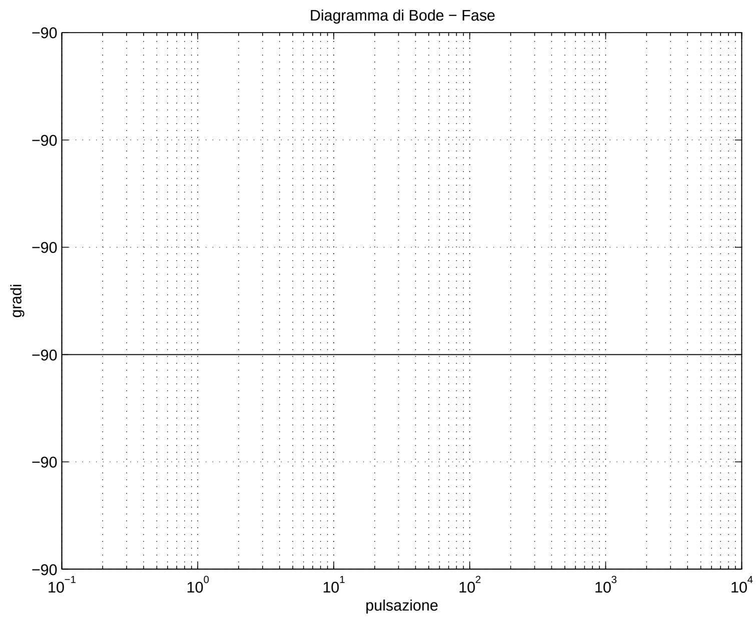
Si trova 10^3 rad/s $= \omega_A > \omega_A^* = 10^2$ rad/s e $95° \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione attenuatrice in modo da abbassare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= |C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da abbassare il diagramma delle fasi di non più di 50°.

Scegliendo $\alpha = 0.1$ e $u = 100$ otteniamo un'attenuazione di 20 dB e un ritardo di fase di 5°. Poichè $T = \frac{u}{\omega_A^*} = 1$, la risultante rete attenuatrice è

$$C_{att}(s) = \frac{1 + 0.1s}{1 + s}.$$

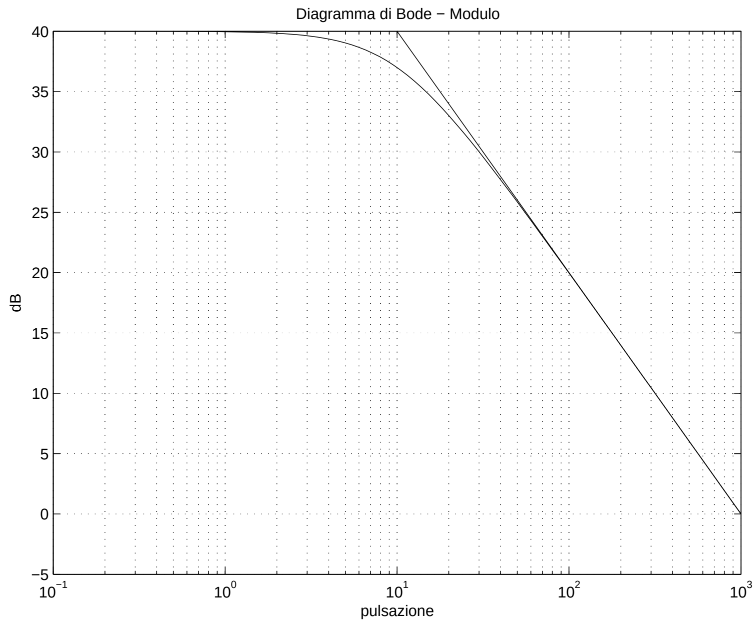
A questa soluzione si poteva facilmente pervenire anche in termini intuitivi e corrisponde ad una doppia cancellazione polo/zero stabili. I diagrammi di Bode della funzione complessiva $C(s)G(s) = \frac{100}{s}$ sono i seguenti:

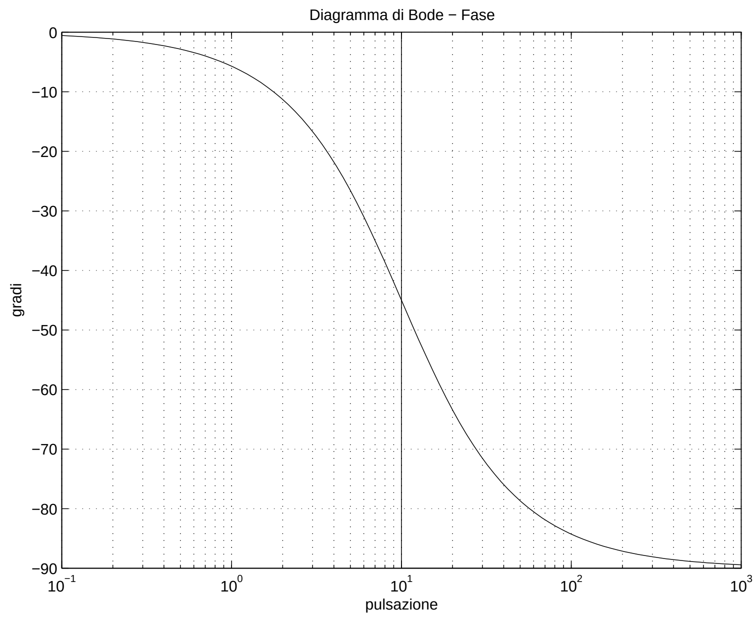




4. Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone
$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)} \approx 0.01$$
da cui segue $K_B(C) \approx 99$. Prendiamo $K_B(C) = 100$ a cui corrisponde $C'(s) = 100$.

   I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

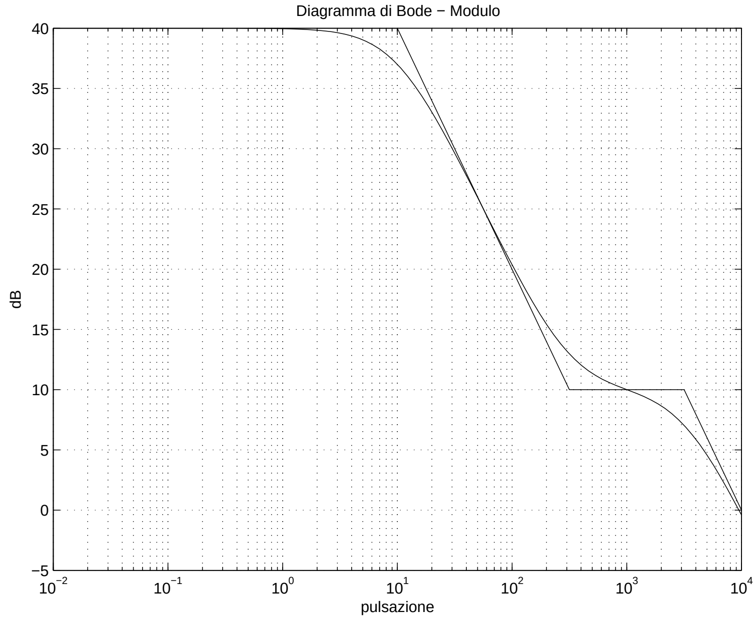


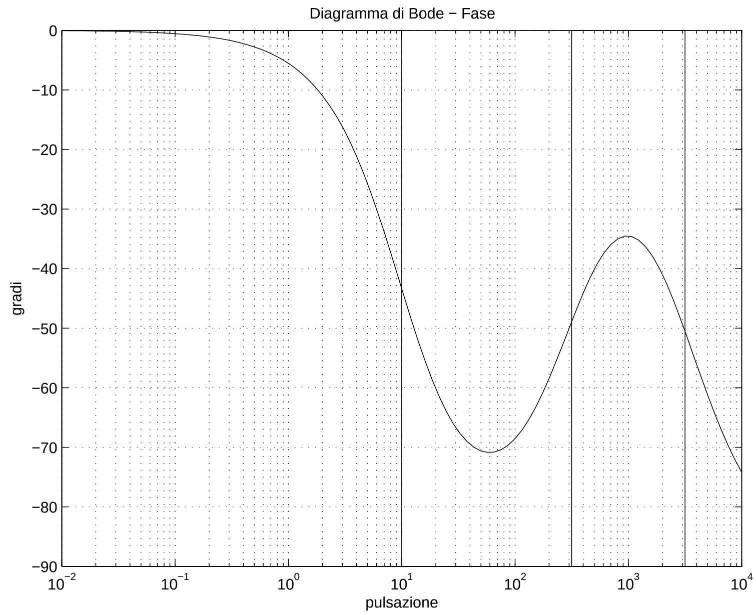


Si trova 10^3 rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 10^4$ rad/s e $95° \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* = 70°$. Saremmo tentati di applicare un'azione puramente proporzionale, tuttavia in questo caso il vincolo sull'errore di regime permanente vincola il valore del guadagno di Bode in catena aperta e pertanto non possiamo accrescerlo. Il soddisfacimento dei vincoli su pulsazione di attraversamento e margine di fase sono tuttavia soddisfacibili attraverso una rete anticipatrice. Una soluzione ad occhio consiste nell'inserire uno zero in $-10^{5/2}$ e successivamente un polo in $-10^{7/2}$. In tal modo si ottiene

$$C(s) = 100\,\frac{1 + 10^{-5/2}s}{1 + 10^{-7/2}s}.$$

I diagrammi di Bode di $C(s)G(s)$ sono i seguenti:





[Soluzione alternativa: $C(s) = 100\ \frac{1+10^{-1}s}{1+10^{-2}s}$.]

5. Un controllore PI può essere riscritto nel seguente modo

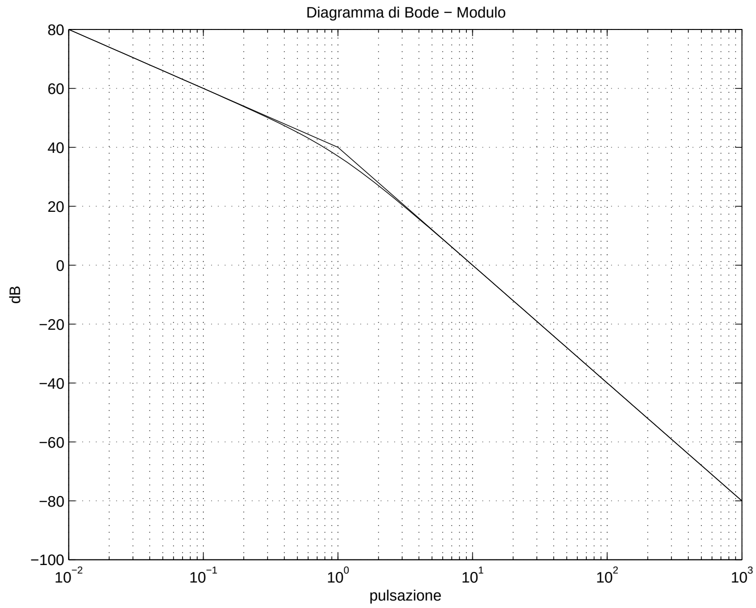
$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s}{s}$$

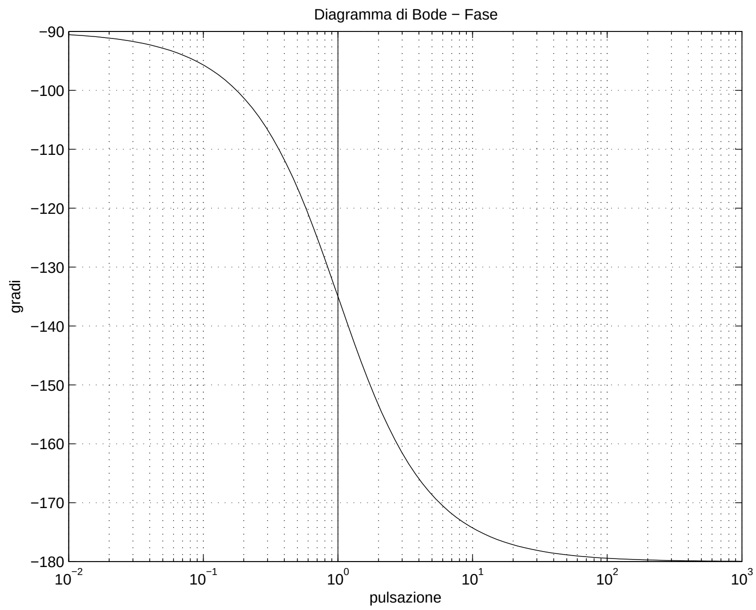
e pertanto consta di un polo in 0 con cui accresco il tipo (da 0 a 1), un guadagno di Bode, con cui sistemo l'errore di regime permanente (in questo caso alla rampa lineare) e, infine, mi rimane uno zero con cui devo aggiustare, se possibile, pulsazione di attraversamento e margine di fase.

Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

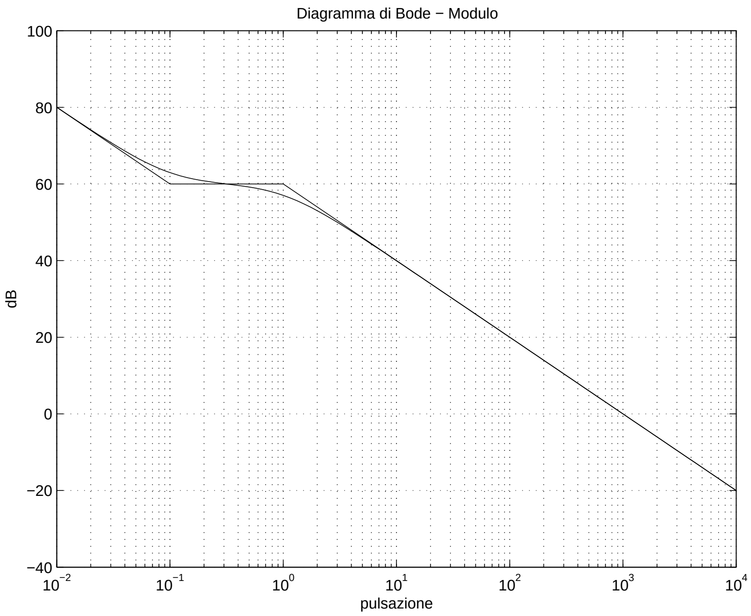
$$e_{rp} = \frac{1}{K_i 10} \approx 0.01$$

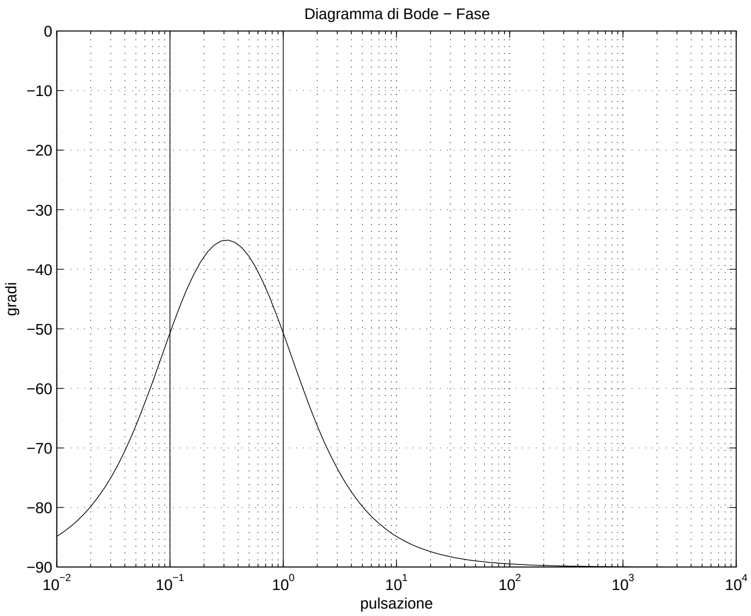
da cui segue $K_i \approx 10$. Prendiamo $K_i = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.
I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s)$ sono i seguenti:





Mettendo uno zero in -0.1 ovvero assumendo $\frac{K_p}{K_i} = 10$, si soddisfano proprio le specifiche assegnate. I diagrammi di Bode della funzione complessiva $C(s)G(s)$ sono, infatti, i seguenti:





Pertanto $K_i = 10$ e $K_p = 100$.