Ottavo test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo discreto) ad un solo ingresso, si progetti (se possibile) un controllo in retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico assegnato:

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = z(z-1)(z-5);$

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = z^3 + 2z^2 - z;$

   (c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = z^3 + 2z - 1;$

   (d) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = z^3 + 2z^2 + z;$

2. Con riferimento ai seguenti modelli di stato raggiungibili a più ingressi, si determini, se necessario, una matrice di pre-retroazione che renda il sistema raggiungibile dallo specifico ingresso assegnato:

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, primo ingresso;

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, secondo ingresso;

   (c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, primo ingresso

   (d) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, secondo ingresso

3. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo continuo) a più ingressi, si progetti (se possibile) un controllo in retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico assegnato:

   (a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad p(s) = (s+1)^3;$

(b) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad p(s) = (s+5)^2(s+1);$

(c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad p(s) = s^2(s+1);$

RISPOSTE

1. Retroazione di modelli di stato ad un solo ingresso. Nel seguito assumeremo

$$K = [\, a \quad b \quad c \,],$$

con a, b, c parametri reali da scegliere opportunamente:

(a) È immediato rendersi conto del fatto che il sistema è raggiungibile e quindi il problema ha soluzione. Tra le varie strategie possibili una è quella di sfruttare la struttura di F ed il fatto che attraverso la matrice G possiamo modificare solo l'ultima riga di F. Se attribuiamo a $F+GK$ una struttura diagonale a blocchi in cui il primo blocco diagonale è scalare con autovalore 1 e al secondo blocco diagonale, di dimensioni 2×2, possiamo attribuire come polinomio caratteristico $z(z-5) = z^2 - 5z$, ovvero

$$F + GK = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right],$$

otteniamo immediatamente per K la seguente scelta:

$$K = [\, 0 \quad -2 \quad 6 \,].$$

(b) È immediato rendersi conto del fatto che il sistema non è raggiungibile, ma è in forma standard di raggiungibilità con $F_{22} = 0$ e quindi il problema ha soluzione. Possiamo prendere in esame il solo sottosistema raggiungibile (F_{11}, G_1)

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ed attribuire alla matrice $F_{11} + G_1 K_1$ il polinomio caratteristico $z^2 + 2z - 1$. In tal modo $F + GK$ diventa

$$F + GK = \left[\begin{array}{cc|c} 1+a & b & 2+c \\ 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e otteniamo immediatamente per K la seguente scelta:

$$K = [\, a \quad b \quad c \,] = [\, -4 \quad -2 \quad c \,],$$

c reale arbitrario.

(c) È immediato rendersi conto del fatto che il sistema è raggiungibile e quindi il problema ha soluzione. Tra le varie strategie possibili una è quella di sfruttare il fatto che la coppia (F, G) è praticamente una forma canonica di controllo (se non fosse che l'unico coefficiente non nullo della matrice G vale $-1/2$). Adottando quindi la strategia di attribuire alla matrice $F + GK$ la struttura di una matrice in forma compagna, con in ultima riga i coefficienti del polinomio caratteristico desiderato, otteniamo l'identità

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 - a/2 & -b/2 & -c/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

che porta a

$$K = [\,0 \quad 4 \quad 0\,]\,.$$

(d) È immediato rendersi conto del fatto che il sistema non è raggiungibile, ma è in forma standard di raggiungibilità con $F_{22} = 0$ e quindi il problema ha soluzione. Possiamo prendere in esame il solo sottosistema raggiungibile (F_{11}, G_1)

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ed attribuire alla matrice $F_{11} + G_1 K_1$ il polinomio caratteristico $z^2 + 2z + 1$. In tal modo $F + GK$ diventa

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e otteniamo immediatamente per K la seguente scelta:

$$K = [\,-1 \quad -3 \quad c\,],$$

c reale arbitrario.

2. Matrice di pre-retroazione che renda il sistema raggiungibile dallo specifico ingresso assegnato (lemma di Heymann):

(a) Il sistema è raggiungibile, ma non lo è dal primo ingresso. La selezione delle colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}$, in accordo con la strategia illustrata nella dimostrazione del lemma di Heymann, porta alla seguente matrice Q:

$$Q = [\,g_1 \quad Fg_1 \quad g_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a cui corrisponde

$$S = [\,0 \quad \mathbf{e}_2 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta, allora,

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Il sistema è raggiungibile, ma non lo è dal secondo ingresso. La selezione delle colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}$, in accordo con la strategia illustrata nella dimostrazione del lemma di Heymann, porta alla seguente matrice Q:

$$Q = [\,g_2 \quad g_1 \quad Fg_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a cui corrisponde

$$S = [\,\mathbf{e}_1 \quad 0 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta, allora,

$$M_2 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Il sistema è raggiungibile, ma non lo è dal primo ingresso. La selezione delle colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}$, in accordo con la strategia illustrata nella dimostrazione del lemma di Heymann, porta alla seguente matrice Q:

$$Q = [\,g_1 \quad g_2 \quad Fg_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix},$$

a cui corrisponde

$$S = [\,\mathbf{e}_2 \quad 0 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta, allora,

$$M_1 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Il sistema è raggiungibile, ma non lo è dal secondo ingresso. La selezione delle colonne linearmente indipendenti in $\mathcal{R}$, in accordo con la strategia illustrata nella dimostrazione del lemma di Heymann, porta alla seguente matrice Q:

$$Q = [\,g_2 \quad Fg_2 \quad g_1 \quad Fg_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a cui corrisponde

$$S = [\,0 \quad \mathbf{e}_1 \quad 0 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice di pre-retroazione risulta, allora,

$$M_2 = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Retroazione di modelli di stato a più (due) ingressi. Nel seguito assumeremo

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}:$$

(a) La raggiungibilità del sistema è di immediata verifica. Con strategia analoga a quella adottata nel caso di sistemi ad un solo ingresso, possiamo attribuire a $F+GK$ una struttura, conseguibile attraverso retroazione, dotata del polinomio caratteristico richiesto. In questo caso specifico possiamo imporre

$$F+GK = \begin{bmatrix} 1+a_1 & b_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ottenendo, in tal modo, tra le infinite soluzioni possibili, la seguente

$$K = \begin{bmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) La raggiungibilità del sistema è di immediata verifica. Con strategia analoga a quella adottata nel caso di sistemi ad un solo ingresso, possiamo attribuire a $F+GK$ una struttura, conseguibile attraverso retroazione, dotata del polinomio caratteristico richiesto. In questo caso specifico possiamo imporre

$$F+GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+a_1 & 1+b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -25 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ottenendo, in tal modo, tra le infinite soluzioni possibili, la seguente

$$K = \begin{bmatrix} -26 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente possiamo imporre

$$F+GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+a_1 & 1+b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

ottenendo, in tal modo la soluzione

$$K = \begin{bmatrix} -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

(c) La raggiungibilità del sistema è di immediata verifica. Con strategia analoga a quella adottata nel caso di sistemi ad un solo ingresso, possiamo attribuire a $F+GK$ una struttura, conseguibile attraverso retroazione, dotata del polinomio caratteristico richiesto. In questo caso specifico possiamo imporre a $F+GK$ una forma compagna

$$F+GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2+a_1 & -1/2+b_1 & -1/2+c_1 \\ a_1+a_2 & 1/2+b_1+b_2 & 1/2+c_1+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ottenendo, in tal modo, tra le infinite soluzioni possibili, la seguente

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 3/2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$