Ottavo test di autovalutazione di CONTROLLI AUTOMATICI
A.A. 2009/2010

Data: 14 Gennaio 2010

1. Si determini l'evoluzione libera dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione alle differenze (omogenea) lineare e a coefficienti costanti in corrispondenza alle specifiche condizioni iniziali assegnate e si dica se il sistema è asintoticamente stabile (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $y(t) - y(t-1) + \frac{1}{4}y(t-2) = 0, \quad y(-1) = y(-2) = 1;$ ....

   (b) $y(t) - 3y(t-1) + 3y(t-2) - y(t-3) = 0, \quad y(-1) = y(-2) = -\frac{2}{3}, y(-3) = 0;$ ....

   (c) $y(t) - 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) y(t-1) + y(t-2) = 0, \quad y(-1) = 0, y(-2) = \frac{1}{\sqrt{2}};$ ....

   (d) $y(t) - \frac{\sqrt{3}}{4}y(t-1) + \frac{1}{16}y(t-2) = 0, \quad y(-1) = 2\sqrt{3}, y(-2) = 8.$ ....

2. Si determini la risposta impulsiva dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione alle differenze lineare e a coefficienti costanti e si dica se il sistema è BIBO stabile (ogni domanda vale 2 punti):

   (a) $y(t) - \frac{3}{2}y(t-1) + \frac{1}{2}y(t-2) = u(t) - u(t-1);$ ....

   (b) $y(t) - y(t-1) + \frac{1}{4}y(t-2) = 2\ u(t-2);$ ....

   (c) $y(t) - 3y(t-1) + 3y(t-2) - y(t-3) = u(t-1) - u(t-2);$ ....

   (d) $3y(t) = u(t-1) - 5u(t-2).$ ....

3. Si determini l'evoluzione forzata dei modelli LTI descritti dalla seguente risposta impulsiva in corrispondenza all'ingresso assegnato (ogni domanda vale 3 punti):

   (a) $w(t) = (1+t)\delta_{-1}(t), \quad u(t) = 2^t\ \delta_{-1}(t);$ ....

   (b) $w(t) = \delta(t) + \delta_{-1}(t-2), \quad u(t) = \frac{1}{2^t}\ \delta_{-1}(t);$ ....

   (c) $w(t) = (-1)^t\delta_{-1}(t), \quad u(t) = [(-1)^t + 2]\ \delta_{-1}(t).$ ....

RISPOSTE

1. Evoluzione libera e stabilità asintotica:
   (a) $y_\ell(t) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{2^t} + \dfrac{1}{4}\ t\ \dfrac{1}{2^t}$.
   Il sistema è asintoticamente stabile giacché i suoi modi sono entrambi convergenti.
   (b) $y_\ell(t) = t + \dfrac{2}{3}\dfrac{t^2}{2}$.
   Il sistema non è asintoticamente stabile giacché uno dei suoi modi è limitato, mentre gli altri due sono divergenti.
   (c) $y_\ell(t) = \left(\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)-1}\right)\cos\left(\dfrac{t\pi}{8}\right) + \left(\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)-1}\right)\sin\left(\dfrac{t\pi}{8}\right)$.
   Il sistema non è asintoticamente stabile giacché entrambi i suoi modi sono limitati, ma non convergenti.
   (d) $y_\ell(t) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^t \cos\left(\dfrac{t\pi}{6}\right)$.
   Il sistema è asintoticamente stabile giacché entrambi i suoi modi sono convergenti.

2. Risposta impulsiva:
   (a) $w(t) = \frac{1}{2^t}\ \delta_{-1}(t)$;
   (b) $w(t) = 8(t-1)\frac{1}{2^t}\ \delta_{-1}(t-1)$;
   (c) $w(t) = t\ \delta_{-1}(t)$;
   (d) $w(t) = \frac{1}{3}\delta(t-1) - \frac{5}{3}\delta(t-2)$.

3. Evoluzione forzata: L'evoluzione forzata è sempre nulla per $t \in \mathbb{Z}, t < 0$, perciò valutiamo solo il comportamento per $t \in \mathbb{Z}_+$.

   (a) Si trova

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{t}(1+i)2^{t-i} = \sum_{i=0}^{t} 2^{t-i} + 2^t\left[\sum_{i=0}^{t} i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right] = \sum_{i=0}^{t} 2^i + 2^t\left[\sum_{i=0}^{t} i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right] \\ &= (2^{t+1}-1) + 2^t\left[\sum_{i=0}^{t} i\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]. \end{aligned}$$

   Per calcolare il secondo termine procediamo come segue: sia $P(z) = \sum_{i=0}^{t} z^i = \frac{1-z^{t+1}}{1-z}$. Osserviamo che

$$\frac{dP(z)}{dz} = \sum_{i=0}^{t} i z^{i-1} = \frac{-(t+1)z^t(1-z) - (1-z^{t+1})(-1)}{(1-z)^2},$$

   e che

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{t} i\left(\frac{1}{2}\right)^i &= z\cdot\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1/2} = z\cdot\left.\frac{-(t+1)z^t(1-z) - (1-z^{t+1})(-1)}{(1-z)^2}\right|_{z=1/2} \\ &= -\frac{t}{2^t} - \frac{2}{2^t} + 2. \end{aligned}$$

   Sostituendo nella precedente espressione, dopo un semplice passaggio, si trova

$$y(t) = \left[4\ 2^t - 3 - t\right]\delta_{-1}(t);$$

(b) Da $w(t) = w_1(t) + w_2(t)$, con $w_1(t) := \delta(t)$ e $w_2(t) := \delta_{-1}(t)$, segue $y(t) = [w_1 * u](t) + [w_2 * u](t)$. Banalmente $[w_1 * u](t) = [\delta * u](t) = u(t)$. D'altra parte posto $\tilde{w}_2(t) = \delta_{-1}(t)$, se osserviamo che $w_2(t) = \tilde{w}_2(t-2)$ e poniamo $\tilde{y}_2(t) = [\tilde{w}_2 * u](t)$, dalla tempo invarianza del sistema segue subito che $[w_2 * u](t) = [\tilde{w}_2 * u](t-2) = \tilde{y}_2(t-2)$.

Il calcolo di $\tilde{y}_2(t)$ porge per $t \geq 0$:

$$\tilde{y}_2(t) = \sum_{i=0}^{t} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right],$$

ovvero

$$\tilde{y}_2(t) = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}\right]\delta_{-1}(t),$$

da cui

$$[w_2 * u](t) = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}\right]\delta_{-1}(t-2) = \frac{2^{t-1}-1}{2^{t-2}}\delta_{-1}(t-2).$$

Mettendo assieme i due contributi si ottiene: $y(t) = \frac{1}{2^t}\delta_{-1}(t) + \frac{2^{t-1}-1}{2^{t-2}}\delta_{-1}(t-2)$;

(c) Si trova

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=0}^{t}(-1)^i\left[(-1)^{t-i} + 2\right] = (-1)^t\sum_{i=0}^{t} 1 + 2\sum_{i=0}^{t}(-1)^i \\ &= (-1)^t(t+1) + 2\frac{1-(-1)^{t+1}}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto $y(t) = \left[(-1)^t(2+t) + 1\right]\delta_{-1}(t)$.