Nono test di autovalutazione di ANALISI DEI SISTEMI

A.A. 2009/2010

1. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo discreto) ad un solo ingresso, si progetti (se possibile) un controllo stabilizzante in retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico assegnato:

   (a) $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^3;$

   (b) $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) z^2;$

   (c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad p(z) = z^3 - z^2 + \frac{1}{4}z;$

2. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo continuo) a due ingressi, si progetti (se possibile) un controllo stabilizzante in retroazione dallo stato che attribuisca al risultante sistema retroazionato il polinomio caratteristico assegnato:

   (a) $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad p(s) = (s+1)^3;$

   (b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad p(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 (s+1).$

3. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo discreto o continuo), già esaminati ai precedenti punti 1 e 2, si progetti (se possibile) un controllore in retroazione dallo stato in modo tale che la matrice $F + GK$ del risultante sistema retroazionato abbia come modi elementari tutti e soli i modi elementari indicati:

   (a) $F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^k, \binom{k}{1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1};$

   (b) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta(k), \left(\frac{1}{2}\right)^k;$

   (c) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e^{-t/2}, te^{-t/2}, e^{-2t}.$

4. Con riferimento ai seguenti modelli di stato (a tempo discreto), si dica se esiste un controllore dead-beat e, in caso affermativo, se ne costruisca uno che attribuisca alla matrice $F + GK$ del risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile:

(a) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$

(b) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$

(c) $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

RISPOSTE

1. Controllo stabilizzante nel discreto con un solo ingresso. Nel seguito assumeremo

$$K = [\,a \quad b \quad c\,],$$

con a, b, c parametri reali da scegliere opportunamente:

(a) La coppia in esame non è raggiungibile dal momento che rank$\mathcal{R} = 2$. Il polinomio caratteristico della matrice F è

$$\Delta_F(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)[(z-1)z + 1] = \left(z + \frac{1}{2}\right)(z^2 - z + 1).$$

L'unica speranza affinchè il problema sia risolubile è che sia proprio l'unico autovalore collocato in $-\frac{1}{2}$ ad essere l'autovalore del sottosistema non raggiungibile (se nessun autovalore fosse stato collocato in $-\frac{1}{2}$, vista la non raggiungibilità del sistema, il problema non avrebbe avuto sicuramente soluzione). Il calcolo della matrice PBH di raggiungibilità in corrispondenza a $z = -\frac{1}{2}$ conferma questa ipotesi, per cui il problema è risolubile. Tra i possibili approcci al problema, il più semplice consiste nell'imporre alla matrice $F + GK$ la seguente struttura

$$F + GK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1+b & -1+c \\ 2 & 1+b & c \end{bmatrix}$$

con la sottomatrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 1+b & -1+c \\ 1+b & c \end{bmatrix}$$

dotata del polinomio caratteristico

$$z^2 - (1+b+c)z + (1+b) = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = z^2 + z + \frac{1}{4}.$$

Ciò corrisponde alla scelta $b = -3/4, c = -5/4$ e porta alla matrice di retroazione

$$K = [\,0 \quad -3/4 \quad -5/4\,].$$

Tuttavia i controllori che risolvono il problema sono infiniti e sono tutti e soli quelli espressi nella forma

$$K = [\,a \quad -3/4 \quad -5/4\,],$$

al variare di a in $\mathbb{R}$.

(b) Il sistema preso in esame in questo caso è lo stesso che avevamo analizzato al punto precedente e del quale avevamo verificato che l'unico autovalore del sottosistema non raggiungibile era $-\frac{1}{2}$. Pertanto, nonostante il sistema sia stabilizzabile, tuttavia non è possibile attribuirgli il polinomio caratteristico assegnato.

(c) È immediato rendersi conto del fatto che la coppia si trova in forma standard di raggiungibilità e che la matrice del sottosistema non raggiungibile è $F_{22} = 0$. Lavorando sul solo sottosistema raggiungibile

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

possiamo scegliere $K_1 = [\, a \quad b \,]$ in modo tale che la matrice in forma compagna

$$F_{11} + G_1 K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 1+b \end{bmatrix},$$

abbia polinomio caratteristico $\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(z) = z^2 - z + \frac{1}{4}$. Si ottiene, in tal modo,

$$K_1 = [\, -\tfrac{1}{4} \quad 0 \,]$$

e quindi

$$K = [\, -\tfrac{1}{4} \quad 0 \quad c \,],$$

c arbitrario in $\mathbb{R}$.

2. Controllo stabilizzante nel continuo con più ingressi. Nel seguito assumeremo

$$K = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

con $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$, parametri reali da scegliere opportunamente:

(a) La coppia (F, G) è raggiungibile pertanto il problema ha soluzione. Se scrivo la matrice $F + GK$ in forma parametrica trovo:

$$F + GK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 1 + b_2 & -1 + c_2 \\ 2 + a_2 & 1 + b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Posso imporre a $F + GK$ una struttura triangolare, assumendo $b_1 = c_1 = a_2 = 0$. In tal modo si ha

$$F + GK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + b_2 & -1 + c_2 \\ 2 & 1 + b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

A questo punto è sufficiente imporre:

- $-\frac{1}{2} + a_1 = -1$, ovvero $a_1 = -\frac{1}{2}$;
- il polinomio caratteristico di $\begin{bmatrix} 1 + b_2 & -1 + c_2 \\ 1 + b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ deve essere $(s + 1)^2$,

per ottenere il risultato desiderato. Si trova allora $b_2 = 0$ e $c_2 = -3$, da cui segue

$$K = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) In questo caso il sistema risulta non raggiungibile e il sottospazio raggiungibile ha dimensione 2, pertanto è necessario andare a valutare quali sia l'autovalore del sottosistema non raggiungibile. La struttura delle matrici F e G permette di verificare immediatamente che l'autovalore della matrice F_{22} è pari a $-1/2$. Pertanto esiste il controllo in retroazione cercato. La matrice $F + GK$ è del tipo

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1 + a_1 & b_1 & -1 + c_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} + a_2 & b_2 & \frac{1}{2} + c_2 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che un modo semplice per risolvere il problema consiste nell'imporre

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1+a_1 & b_1 & -1+c_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}+a_2 & b_2 & \frac{1}{2}+c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ciò corrisponde a scegliere

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

3. Controllo con assegnazione dei modi.

   (a) Il sistema retroazionato ha come modi elementari i due modi assegnati (ed essi solamente) se e solo se il polinomio minimo della matrice $F+GK$ è $\psi_{F+GK}(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^2$. Condizione necessaria, ma non sufficiente, affinché ciò avvenga è che il polinomio caratteristico di $F+GK$ sia $\Delta_{F+GK}(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^3$. Andiamo quindi a prendere in esame la soluzione ottenuta al punto (a) del precedente esercizio 1. Abbiamo visto che i controllori che attribuiscono a $F+GK$ il polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^3$ sono infiniti e sono tutti e soli quelli espressi nella forma

$$K = [\, a \quad -3/4 \quad -5/4 \,],$$

al variare di a in $\mathbb{R}$. Si tratta quindi di capire se esiste qualche valore del parametro a in corrispondenza al quale $F+GK$, oltre ad avere polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^3$, ha pure forma di Jordan

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tale situazione si verifica se e solo se la molteplicità geometrica di $-\frac{1}{2}$ per J o, equivalentemente, per $F+GK$, è pari a 2. Osservo che in corrispondenza al precedente K, la matrice $F+GK$ diventa

$$F + GK = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \\ a+2 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

Il calcolo del rango di $\left(-\frac{1}{2}I_3 - (F+GK)\right)$, equivalentemente di

$$\left((F+GK) + \frac{1}{2}I_3\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} \\ a+2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

evidenzia come tale rango sia genericamente 2 ed esso risulti unitario se e solo se le ultime due righe risultano linearmente dipendenti, ovvero se e solo se $a = 3(a+2)$, che corrisponde a $a = -3$. Pertanto solo per $a = -3$ il rango di $\left(-\frac{1}{2}I_3 - (F+GK)\right)$ vale 1 e quindi la dimensione dell'autospazio relativo a $-1/2$ per la matrice $F+GK$ è 2 (ovvero la molteplicità geometrica di $-1/2$ è 2). Pertanto la soluzione cercata è

$$K = [\, -3 \quad -3/4 \quad -5/4 \,].$$

(b) Abbiamo già osservato che la coppia si trova in forma standard di raggiungibilità e che la matrice del sottosistema non raggiungibile è $F_{22} = 0$. La situazione in cui i modi elementari del sistema sono unicamente $\delta(k)$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ corrisponde alla situazione in cui il polinomio minimo della matrice $F + GK$ è $\psi_{F+GK}(z) = z\left(z - \frac{1}{2}\right)$. Questa situazione è compatibile con due differenti poliinomi caratteristici: $\Delta_1(z) = z^2\left(z - \frac{1}{2}\right)$ e $\Delta_2(z) = z\left(z - \frac{1}{2}\right)^2$. Poichè entrambi sono multipli di $\Delta_{F_{22}}(z) = z$, entrambi sono attribuibili alla matrice $F + GK$ del sistema retroazionato. Osservo che la matrice $F + GK$, in corrispondenza al generico controllore K, risulta essere

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 1+b & 1+c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e quindi posso attribuirle una struttura diagonale a blocchi (scegliendo $c = -1$) con un primo blocco di dimensione 2 ed un secondo blocco di dimensione 1 (che altro non è che $F_{22} = 0$). Allora la scelta più semplice consiste nell'attribuire al primo blocco diagonale il polinomio caratteristico $z\left(z - \frac{1}{2}\right)$. In tal modo, infatti, vista la struttura diagonale di $F + GK$, saremo certi che la forma di Jordan di $F + GK$ sia

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e quindi i modi saranno quelli desiderati. Imponendo dunque che la matrice in forma compagna

$$F_{11} + G_1K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 1+b \end{bmatrix},$$

abbia polinomio caratteristico $\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(z) = z^2 - \frac{1}{2}z$, si trova

$$K_1 = [\,0 \quad -\tfrac{1}{2}\,]$$

e quindi

$$K = [\,0 \quad -\tfrac{1}{2} \quad -1\,].$$

(c) Il sistema non è raggiungibile ed ha $-1/2$ come autovalore del sottosistema non raggiungibile. Attribuire quei tre modi alla matrice del sistema retroazionato equivale ad attribuire a $F + GK$ il polinomio minimo $\psi_{F+GK}(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 (s + 2)$. Tale polinomio minimo impone come polinomio caratteristico $\Delta_{F+GK}(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 (s + 2)$ e questo è certamente ottenibile per retroazione. La struttura della matrice $F + GK$ in forma parametrica

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1 + a_1 & b_1 & -1 + c_1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} + a_2 & b_2 & \frac{1}{2} + c_2 \end{bmatrix}$$

suggerisce una soluzione semplice che consiste nell'eguagliare la precedente matrice con la matrice in forma di Jordan che ha polinomio minimo $\psi_{F+GK}(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 (s + 2)$, ovvero

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A tale soluzione si perviene scegliendo

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

4. Controllore dead-beat che attribuisca alla matrice $F+GK$ del risultante sistema retroazionato indice di nilpotenza minimo possibile:

   (a) Posto $K = [\, a \quad b \quad c \,]$, consideriamo la matrice

   $$F + GK = \begin{bmatrix} 1+a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   È evidente che non è possibile attribuire alla matrice indice di nilpotenza 1, ovvero renderla nulla. Pertanto proviamo a vedere se è possibile attribuirle indice di nilpotenza 2. Dal calcolo del polinomio caratteristico di $F + GK$ deriva che affinché la matrice sia nilpotente occorre e basta che $a = -2$ e $b = -1$. A questo punto il parametro c rimane libero e

   $$F + GK = \begin{bmatrix} -1 & -1 & c \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   L'unico valore di c che assicura che $(F + GK)^2 = 0$ è $c = 0$. Pertanto il controllore dead-beat cercato è

   $$K = [\, -2 \quad -1 \quad 0 \,].$$

   (b) Il sistema è chiaramente raggiungibile. Anche in questo caso è evidente come non sia possibile attribuire alla matrice indice di nilpotenza 1, ovvero renderla nulla. D'altra parte possiamo portare la matrice $F+GK$ nella stessa forma che abbiamo visto al punto (a), ovvero nella forma

   $$F + GK = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a cui compete indice di nilpotenza 2. A questo caso ci possiamo portare attraverso la matrice di controllo in retroazione

   $$K = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (c) La coppia (F, G) è chiaramente raggiungibile. Osservando che non è possibile attribuire alla matrice indice di nilpotenza 1, ovvero renderla nulla, proviamo a vedere se è possibile attribuirle indice di nilpotenza 2. Al variare del controllore K possiamo attribuire a $F + GK$ una struttura del seguente tipo

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

in cui i simboli $*$ rappresentano elementi arbitrari. Ma allora è immediato scegliere una struttura per $F + GK$ che sia quella di una matrice nilpotente con indice di nilpotenza pari a 2:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A questa struttura si perviene scegliendo

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$