COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
14 Gennaio 2005

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 4\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (-a^2 + a + 3)\frac{dy(t)}{dt} + 3a(1-a)y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema, al variare di a in $\mathbb{R}$.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 0$

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0.$$

iii) Si determini la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta(t) + e^t \delta_{-1}(t).$$

iv) Si tracci il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema.

[Per gli studenti del NUOVO ORDINAMENTO: il tracciamento del diagramma di Nyquist può essere effettuato a partire dal diagramma di Bode].

Esercizio 2. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$W(s) = 100\ \frac{(s-1)(s+1000)}{(s+10)\,(s^2 + 50s + 10000)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) [VECCHIO ORDINAMENTO] Si determini, se esiste, la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t) + \sin t\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 3. Si consideri il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 + 0.1s}{(1+s)^2}.$$

Si progetti un controllore $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente all'incirca $e^*_{rp} = 0.092$;

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega^*_A = 10$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

Teoria. [NUOVO ORDINAMENTO] Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + \ldots + b_0 u(t),$$

$(a_n \neq 0)$ e sollecitato dal segnale di ingresso

$$u(t) = e^{j\omega t} \delta_{-1}(t),$$

con $\omega \in \mathbb{R}$ fissato. Si introduca il concetto di risposta di regime permanente, e si illustri in dettaglio la relazione tra l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema in corrispondenza all'ingresso assegnato e l'uscita di regime permanente $y_{rp}(t)$, evidenziando le condizioni sotto cui tale risposta di regime permanente esiste, sia nel caso in cui le condizioni iniziali del sistema siano assegnate e arbitrarie che nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle e il sistema evolva, pertanto, di sola evoluzione forzata.

Teoria. [VECCHIO ORDINAMENTO] Dato un modello ingresso/uscita a tempo discreto

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(t-n+i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(t-n+i), \qquad t \in \mathbb{Z}_+,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ e $(a_0, b_0) \neq (0,0)$, si determini la risposta impulsiva del sistema e se ne giustifichi l'espressione.

SOLUZIONE DEL COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

DEL 14 GENNAIO 2005

ESERCIZIO 1:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + (-a^2+a+3)\frac{dy}{dt} + 3a(1-a)y = \frac{du}{dt} - u$$

i) STABILITA' ASINTOTICA E STABILITA' BIBO [4 PUNTI]

Equazione caratteristica

$$s^3 + 4s^2 + (-a^2+a+3)s + 3a(1-a) = 0$$

Valutazione zeri del polinomio $s^3 + 4s^2 + (-a^2+a+3)s + 3a(1-a)$ attraverso il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & -a^2+a+3 \\
2 & 4 & 3a(1-a) \\
1 & \dfrac{-a^2+a+12}{4} & 0 \\
0 & 3a(1-a) & 0
\end{array}$$

Condizioni affinché il polinomio sia di Hurwitz:

$$\begin{cases} \dfrac{-a^2+a+12}{4} > 0 \\ 3a(1-a) > 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} a^2-a-12 = (a-4)(a+3) < 0 \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -3 < a < 4 \\ 0 < a < 1 \end{cases} \iff 0 < a < 1$$

Pertanto il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $0 < a < 1$

Per $0 < a < 1$ ho ovviamente anche stabilità BIBO

Poiché è immediato rendersi conto del fatto che la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3 + 4s^2 + (-a^2 + a + 3)s + 3a(1-a)}$$

l'unico eventuale caso in cui ci può essere BIBO stabilità è per quel (o quei) valore di $a \in \mathbb{R}$ per cui 1 è zero del polinomio al denominatore e i rimanenti zeri sono in $Re(s) < 0$.

Da

$$0 = s^3 + 4s^2 + (-a^2 + a + 3)s + 3a(1-a) \Big|_{s=1}$$

$$\overset{!}{=} 1 + 4 - a^2 + a + 3 + 3a - 3a^2$$

$$\overset{!}{=} 8 + 4a - 4a^2 = -4(a^2 - a - 2)$$

segue che

$$a^2 - a - 2 = 0 \iff a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Per $a = 2$ il polinomio al denominatore diventa

$$s^3 + 4s^2 + s - 6 = (s-1)(s^2 + 5s + 6)$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \quad \text{BIBO stabile per Cartesio}$$

Per $a = -1$ il polinomio al denominatore diventa

$$s^3 + 4s^2 + s - 6 = (s-1)(s^2+5s+6)$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$ BIBO stabile per Cartesio

ii) $a = 0$ Evoluzione libera per

$$y(0^-) = 0 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = -1 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0$$ [3 PUNTI]

Per $a=0$ l'equazione caratteristica diventa:

$$0 = s^3 + 4s^2 + 3s = s(s^2+4s+3) = s(s+1)(s+3)$$

$$\longrightarrow \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = -3$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

$\longrightarrow$ evoluzione libera generica

$$y_\ell(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Determino c_1, c_2 e c_3 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = y(0^-) = y_\ell(0^-) = c_1 + c_2 + c_3 \\ -1 = \dfrac{dy(0^-)}{dt} = \dfrac{dy_\ell(0^-)}{dt} = -c_2 e^{-0} - 3c_3 e^{-0} = -c_2 - 3c_3 \\ 0 = \dfrac{d^2y(0^-)}{dt^2} = \dfrac{d^2y_\ell(0^-)}{dt^2} = c_2 e^{-0} + 9c_3 e^{-0} = c_2 + 9c_3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow 6c_3 = -1 \longrightarrow c_3 = -\frac{1}{6} \longrightarrow c_2 = 1 - 3c_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

iii) RISPOSTA FORZATA AL SEGNALE [3 PUNTI]

$$u(t) = \delta(t) + e^t \delta_{-1}(t)$$

Attraverso le trasformate di Laplace

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = 1 + \frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1}$$

$$Y_f(s) = W(s)\,U(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+3)} \cdot \frac{s}{s-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} =$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1) Y_f(s) = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \to -3} (s+3) Y_f(s) = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+3}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

iv) DIAGRAMMA DI NYQUIST DI $W(j\omega)$ [6 PUNTI]

$$W(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+3)} = \frac{-j(j\omega-1)(1-j\omega)(3-j\omega)}{\omega(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

$$= \frac{(\omega+j)[(3-\omega^2)-j4\omega]}{\omega(1+\omega^2)(9+\omega^2)} = \frac{[\omega(3-\omega^2)+4\omega]+j[3-\omega^2-4\omega^2]}{\omega(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

$$= \frac{\omega(7-\omega^2)+j(3-5\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{7-\omega^2}{(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{3-5\omega^2}{\omega(1+\omega^2)(9+\omega^2)}$$

SEGNO

$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} >0 & 0 < \omega < \bar{\omega}_1 := \sqrt{7} \\ 0 & \omega = \bar{\omega}_1 \\ <0 & \omega > \bar{\omega}_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = \begin{cases} > 0 & 0 < \omega < \bar{\omega}_2 = \sqrt{3/5} \\ = 0 & \omega = \bar{\omega}_2 \\ < 0 & \omega > \bar{\omega}_2 \end{cases}$$

VALORI LIMITE E VALORI CRITICI

$$\mathrm{Re}\{W(j0)\} = \frac{7}{9}$$

$$\lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = +\infty$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = 0^-$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = 0^-$$

$\omega = \bar{\omega}_1$ $\quad \mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = 0$

$$\mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = \frac{3 - 5 \cdot 7}{\sqrt{7}(1+7)(9+7)} = -\frac{32}{\sqrt{7} \cdot 8 \cdot 16} = -\frac{1}{4\sqrt{7}}$$

$\omega = \bar{\omega}_2$ $\quad \mathrm{Im}\{W(j\omega)\} = 0$

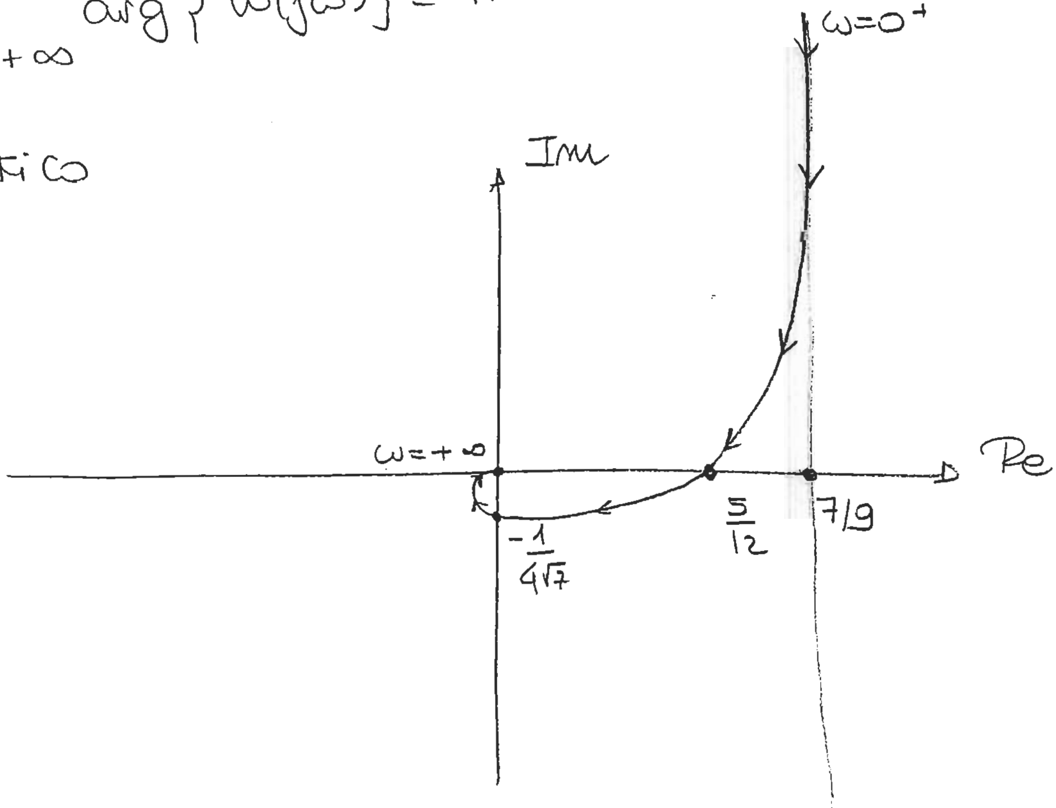
$$\mathrm{Re}\{W(j\omega)\} = \frac{7 - 3/5}{\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(9 + \frac{3}{5}\right)} = \frac{\cancel{32} \cdot 5}{\cancel{8}_2 \, \cancel{48}_6} = \frac{5}{12}$$

FASI

$$\lim_{\omega \to 0^+} \arg\{W(j\omega)\} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \arg\{W(j\omega)\} = \pi$$

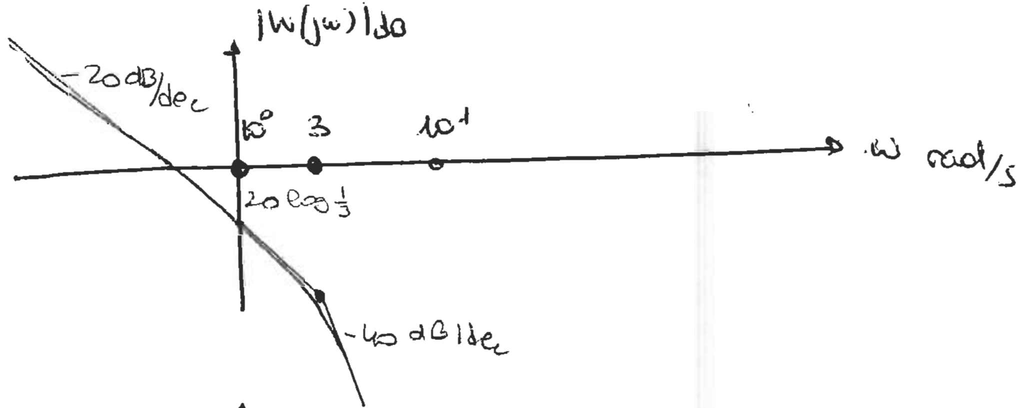
GRAFICO

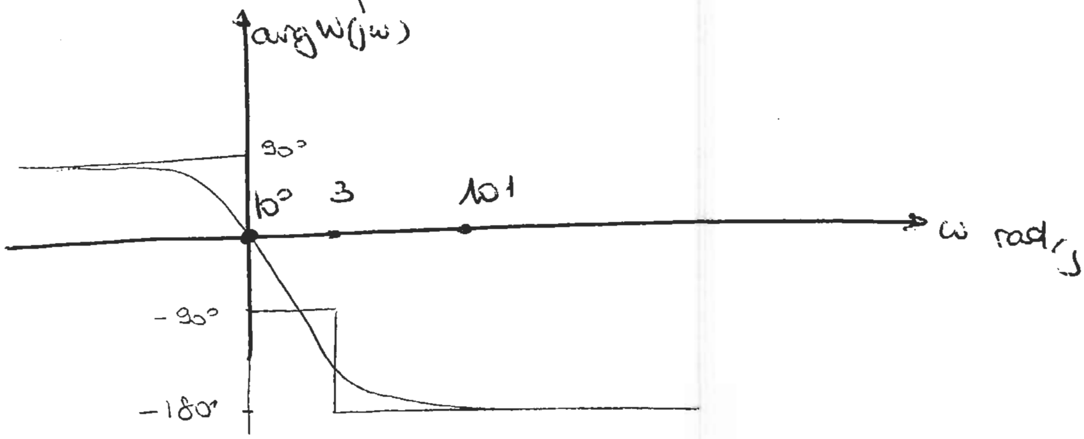


Per gli studenti del NUOVO ORDINAMENTO si poteva pervenire al diagramma di Nyquist tracciando preventivamente quello di Bode. Il diagramma di Bode di

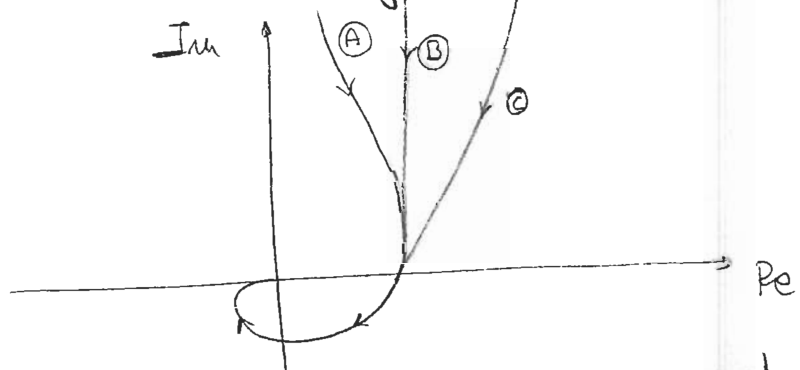
$$W(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+3)} = -\frac{1}{3} \quad \frac{(1-s)}{s(1+s)\left(1+\frac{s}{3}\right)}$$

è





Da cui si deduce il diagramma di Nyquist



dove (A) (B) e (C) sono gli andamenti del diagr. di Nyquist compatibili per $\omega \to 0_+$ con il diagr. di Bode

ESERCIZIO 2

$$W(s) = 100 \frac{(s-1)(s+10^3)}{(s+10)(s^2+50s+10^4)}$$

i) DIAGRAMMA DI BODE [4 PUNTI]

$$K_B = -\frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^4} = -\frac{10^5}{10^5} = -1$$

DUE ZERI : 1 (A PARTE) REALE > 0

-10^3 REALE < 0

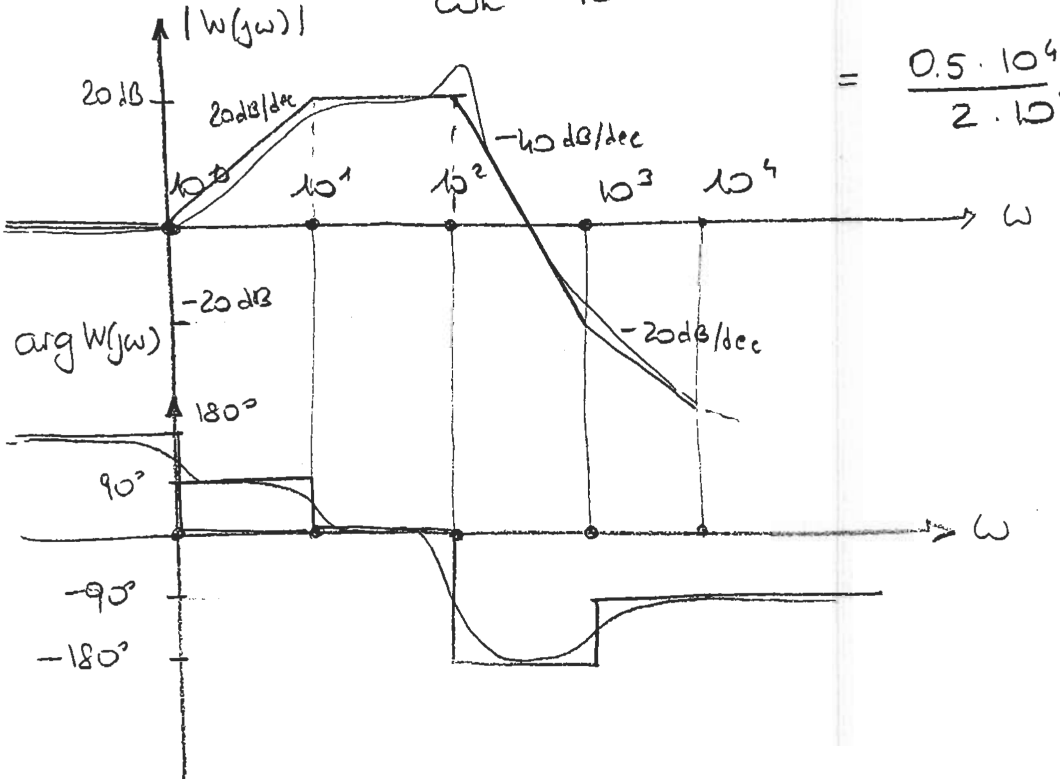
UN POLO REALE : -10

UN TERMINE TRINOMIO $1 + \frac{50}{10^4}s + \frac{s^2}{10^4}$

$$\omega_n = 10^2$$

$$2\frac{\xi}{\omega_n} = \frac{50}{10^4} \longrightarrow \xi = \frac{50}{10^4}\frac{\omega_n}{2} = \frac{50 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^4}$$

$$= \frac{0.5 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^4} = 0.25 = \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$



ii) RISPOSTA DI REGIME PERMANENTE A

$$u(t) = \delta_{-1}(t) + \sin t \, \delta_{-1}(t) \qquad [3 \text{ PUNTI}]$$

Esiste la risposta forzata di regime permanente a tale segnale dal momento il sistema è evidentemente BIBO stabile

Per quanto ha

$$y_{rp}(t) = W(0)\,\delta_{-1}(t) + |W(j)| \sin(t + \arg W(j))\,\delta_{-1}(t)$$

$$W(0) = -1$$

Dal grafico, inoltre, si deduce che

$$|W(j)|_{dB} = |W(j10^0)|_{dB} \cong 3\text{ dB} \qquad \text{ovvero} \qquad |W(j)| \cong \sqrt{2}$$

$$\arg W(j) = \arg W(j10^0) = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad y_{rp}(t) \cong -\delta_{-1}(t) + \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)\delta_{-1}(t)$$
$$= [-1 - \sin t - \cos t]\,\delta_{-1}(t)$$

ESERCIZIO 3

$$G(s) = \frac{1 + 0.1 s}{(1+s)^2}$$

$C(s)$ in modo tc

i) $W(s)$ di tipo 0 con $e_{rp} \cong e_{rp}^* = 0.092$

ii) $\omega_A \cong \omega_A^* = 10$ rad/sec

iii) $m_\varphi(\omega_A^*) \geq 45^\circ$

i) vincolo su e_{rp} [1.5 PUNTI]

$$e_{rp} = \frac{1}{1+K_B(C)K_B(G)} \cong e_{rp}^* = 0.092$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1+K_B(C)\,K_B(G) \cong \frac{1}{0.092} \cong 10.87$$

$$K_B(G) = 1$$

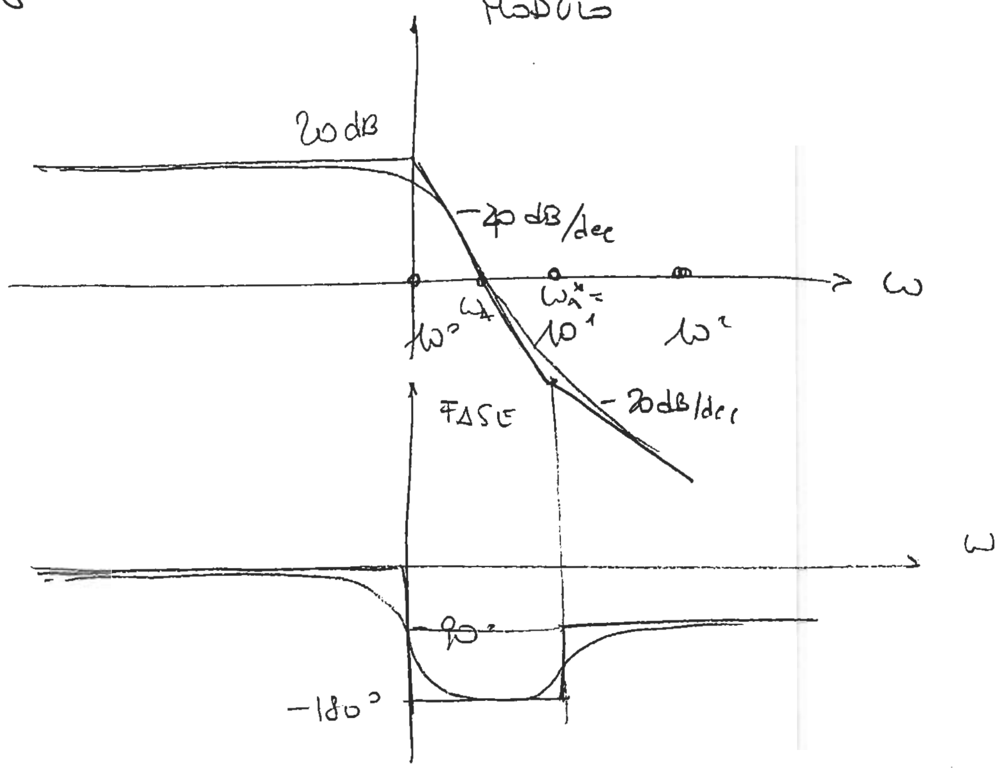
$$\Longleftrightarrow \quad K_B(C) \cong 9.87$$

Prendiamo $C(s) = K_B(C) = 10$

ii) + iii) [3.5 PUNTI]

$$C(s)\,G(s) = 10\,\frac{1+0.1s}{(1+s)^2}$$

Diagrammi di Bode



si vede che $\omega_A \cong 10^{1/2}$ rad/sec $< \omega_A^*$

$m_\varphi(\omega_A^*) \cong 45^\circ$

Non potendo modificare K altrimenti verrebbe a cadere le vincolo su e_{rp}, dobbiamo agire con una azione anticipatrice. Poiché $|C(j\omega_A^*)\,G(j\omega_A^*)|_{dB} = -20$ dB dobbiamo alzare il diagramma delle ampiezze di 20 dB.

Scegliendo $\alpha = 0.08$ $\quad u = \omega_A^* T \cong 17 \longrightarrow T = 1.7$

si ottiene un incremento di fase di circa 33°

$\longrightarrow$

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + s\,1.7}{1 + s \cdot 0.136}$$

$$\Rightarrow \quad C_{Tot}(s) = 10 \cdot \frac{1+s\,1.7}{1 + s \cdot 0.136}$$

Una SOLUZIONE SEMPLICE ottenibile ad occhio anche se non caldeggiabile perché porta a una doppia cancellazione è quella di assumere

$$C_{ant}(s) = \frac{1+s}{1+0.1\,s}$$

$$\Rightarrow \quad C_{TOT}(s) = 10\,\frac{(1+s)}{(1+0.1s)} \quad \Rightarrow \quad C_{TOT}(s)\,G(s) = \frac{10}{1+s}$$

TEORIA [NUOVO ORDINAMENTO] [5 PUNTI]

Si veda il libro di testo al CAPITOLO 4, paragrafo 4.3.

TEORIA [VECCHIO ORDINAMENTO] [3 PUNTI]

Si veda il libro di testo al CAPITOLO 10.