Cenni sulla Serie di Fourier

Note per le lezioni del corso di

"Controlli Automatici"

Prof.ssa Maria Elena Valcher

1 Serie di Fourier

Osserviamo preliminarmente che la somma di segnali periodici non è necessariamente un segnale periodico. Se consideriamo, ad esempio, una somma di segnali di tipo sinusoidale, è noto che tale somma è un segnale periodico se e solo se i rapporti dei vari periodi (equivalentemente, delle varie pulsazioni) dei singoli addendi sono tutti numeri razionali. Similmente al caso sinusoidale, una somma di segnali di tipo fasoriale $e^{j\omega_i t}, t \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$, è un segnale periodico se e solo se i rapporti dei vari periodi dei singoli addendi $T_i = 2\pi/omega_i$ sono tutti numeri razionali.

In generale, se $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sono i periodi di n segnali periodici componenti e T_i/T_j è un numero razionale per ogni scelta di i e j in $\{1, 2, \ldots, n\}$, allora il segnale somma è periodico e il suo periodo fondamentale è il più piccolo numero T che sia multiplo intero (e positivo) di tutti i T_i.

Esempio Il segnale

$$v(t) = 2\ \cos(400\pi t + \phi_1) + 3\ \cos(600\pi t + \phi_2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

è periodico dal momento che $400\pi/(600\pi) = 2/3$. Il periodo della prima componente è $T_1 = 2\pi/(400\pi) = 1/200$ s, mentre il periodo della seconda componente è $T_2 = 2\pi/(600\pi) = 1/300$ s. Osservando che

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2},$$

si deduce che il periodo (fondamentale) del segnale complessivo è $T_0 = 2T_1 = 3T_2 = 1/100$ s.

Invece, il segnale

$$v(t) = 2\ \sin(\sqrt{2}t + 1) + 3\ \cos(2t + 2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

non è periodico perché il rapporto delle pulsazioni è un numero irrazionale, ovvero $\sqrt{2}/2$. ♠

Come conseguenza delle precedenti considerazioni, possiamo affermare che ogni combinazione lineare finita di segnali fasoriali con pulsazioni multiple di una assegnata pulsazione fondamentale $\omega_0 = 2\pi/T_0$ è un segnale periodico di periodo T_0. Tale proprietà si estende anche al caso di somma infinita e, specificatamente, alla somma della serie

$$v(t) \doteq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \; e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \; e^{j\frac{2\pi k}{T_0}t}, \tag{1}$$

a condizione che tale somma sia convergente. Nell'eventualità in cui i coefficienti v_k siano quantità complesse, un volta rappresentato v_k in modulo e fase, ovvero come $v_k = |v_k|e^{j\arg(v_k)}$, si ha, inoltre,

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |v_k| \; e^{j(k\omega_0 t + \arg(v_k))}.$$

È immediato, inoltre, rendersi conto del fatto che le precedenti considerazioni si estendono al caso di somma infinita di segnali sinusoidali con pulsazioni multiple di una assegnata pulsazione.

Una volta osservato che ogni somma di segnali fasoriali o di segnali sinusoidali con pulsazioni multiple di una pulsazione ω_0 è sempre un segnale periodico di periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$, è naturale domandarsi se valga il viceversa, ovvero se un segnale periodico di periodo T_0 sia sempre rappresentabile come combinazione lineare di segnali fasoriali con pulsazioni multiple della pulsazione ω_0. La risposta a tale domanda va ricercata nella teoria della serie di Fourier che rappresenta l'oggetto della restante parte di questo paragrafo.

Convergenza puntuale della serie di Fourier:

sia $v(t)$ una funzione periodica di periodo T_0, reale o complessa di variabile reale. Se $v(t)$ è generalmente[1] continua e generalmente derivabile, con derivata prima generalmente continua e limitata su $[t_0, t_0+T_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, allora $v(t)$ possiede solo discontinuità eliminabili o di prima specie[2] ed è quindi una funzione limitata. Sotto tali ipotesi la funzione $v(t)$ risulta sia **sommabile** che **a quadrato sommabile** in $[t_0, t_0 + T_0)$, il che equivale a dire che esistono finiti, rispettivamente, l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |v(t)| \; dt < +\infty$$

e l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} |v(t)|^2 \; dt < +\infty.$$

[1]Si dice che una funzione gode "generalmente" di una data proprietà su un intervallo finito $[a, b)$ se tale proprietà è verificata su tutto $[a, b)$ ad esclusione di al più un numero finito di punti.

[2]Sia v una funzione definita su un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $\bar{t} \in I$ un punto di accumulazione per I in cui v non è continua. $\bar{t}$ è **punto di discontinuità eliminabile** se esiste finito $\lim_{t\to\bar{t}} v(t)$ ed è un **punto di discontinuità di prima specie** se esso è un punto interno ad I ed esistono finiti sia il limite sinistro che il limite destro di $v(t)$ per t tendente a $\bar{t}$, ma essi non coincidono.

Una funzione $v(t)$ periodica di periodo T_0 che soddisfi alle suddette condizioni è sviluppabile in **serie di Fourier**, ovvero, per ogni $t \in [t_0, t_0 + T_0)$ in cui la funzione risulti continua, vale l'identità

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \; e^{jk\omega_0 t}, \tag{2}$$

dove $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ed i coefficienti dello sviluppo in serie sono dati da

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Invece, per i valori di t in cui la funzione non è continua, la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \; e^{jk\omega_0 t} \tag{4}$$

restituisce la media aritmetica tra il limite destro ed il limite sinistro della funzione in t, ovvero

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \; e^{jk\omega_0 t} = \frac{v(t^-) + v(t^+)}{2}. \tag{5}$$

Inoltre, la serie (4) converge uniformemente a $v(t)$ in ogni intervallo chiuso contenuto in $(t_0, t_0 + T_0)$ in cui non cadano punti di discontinuità.

La (2) restituisce una rappresentazione di $v(t)$ come somma di segnali fasoriali ed è, quindi, detta **equazione di sintesi** della serie di Fourier, mentre la (3) consente di determinare i coefficienti da attribuire ai segnali fasoriali e per questo motivo è anche detta **equazione di analisi**.

Si noti che il coefficiente v_0 rappresenta il valor medio (calcolato sul periodo) della funzione $v(t)$. Se $v(t)$ è una funzione reale v_0 è a sua volta reale e può essere determinato, in alcuni casi di interesse per le applicazioni, per semplice ispezione del grafico di $v(t)$.

È possibile ottenere, oltre alla **rappresentazione** (2), detta **in forma esponenziale**, anche una **rappresentazione in forma trigonometrica** della serie di Fourier. Supponiamo che $v(t)$ sia reale, dal momento che questo è il caso a cui siamo maggiormente interessati. Da tale ipotesi segue che

$$v_{-k} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) \; e^{-j(-k)\omega_0 t} dt = \overline{v_k}, \quad \forall \; k \in \mathbb{Z},$$

e si ha, pertanto, $|v_{-k}| = |v_k|$ e $\arg(v_{-k}) = -\arg(v_k)$. Di conseguenza,

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=-\infty}^{-1} |v_k| \; e^{j\arg(v_k)} e^{jk\omega_0 t} + v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| \; e^{j\arg(v_k)} e^{jk\omega_0 t} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| \; e^{-j\arg(v_k)} e^{-jk\omega_0 t} + v_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| \; e^{j\arg(v_k)} e^{jk\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Pertanto, invocando la formula di Eulero, si ottiene

$$v(t) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| \cos(k\omega_0 t + \arg(v_k)),$$

o, equivalentemente,

$$v(t) = v_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |v_k| \sin(k\omega_0 t + \arg(v_k) + \pi/2).$$

Convergenza in media quadratica della serie di Fourier:

supponiamo ancora che la funzione $v(t)$ sia generalmente continua e generalmente derivabile, con derivata prima generalmente continua e limitata su $[t_0, t_0 + T_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, e quindi ammetta sviluppo in serie di Fourier. In molte situazioni pratiche non è possibile rappresentare $v(t)$ attraverso gli infiniti termini della sua serie di Fourier, ma è necessario ricorrere ad una serie troncata, ad esempio ad una somma pesata dei soli termini $e^{jk\omega_0 t}$, $f_0 = 1/T_0$, per $|k| \leq L$ del tipo

$$v_L(t) = \sum_{k=-L}^{+L} V_k \, e^{jk\omega_0 t}. \tag{6}$$

Ovviamente il rappresentare $v(t)$ mediante una somma finita porta ad un errore di rappresentazione ed è naturale chiedersi in che modo vadano scelti i coefficienti V_k in modo da ottenere la rappresentazione "migliore" possibile tra quelle vincolate ad avere la struttura (6), cioè tale da rappresentare la funzione $v(t)$ nel modo "più fedele", a parità di numero di addendi. Per rispondere a questa domanda è innanzitutto necessario definire una misura per l'errore associato ad una rappresentazione $v_L(t)$ di $v(t)$. Una misura comunemente adottata è il cosiddetto **errore quadratico medio** (**MSE**, ovvero *mean square error*), definito come

$$\mathrm{MSE}(v(t), v_L(t)) \doteq \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |e_L(t)|^2 dt,$$

dove l'errore $e_L(t)$ è

$$e_L(t) \doteq v(t) - v_L(t).$$

Si noti che $v_L(t)$ ed $e_L(t)$ sono, a loro volta, segnali periodici di periodo T_0 e che $\mathrm{MSE}(v(t), v_L(t))$ rappresenta proprio la potenza del segnale (periodico) d'errore $e_L(t)$. Pertanto la scelta "ottima" per i coefficienti di $v_L(t)$ è proprio quella che minimizza la potenza del segnale d'errore.

Si può dimostrare che i valori di V_k che minimizzano l'errore quadratico medio sono proprio quelli della serie di Fourier associata a $v(t)$, i.e.

$$V_k = v_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad k = -L, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, L.$$

La convergenza in media quadratica può essere interpretata nel seguente modo: come già evidenziato, $\text{MSE}(v(t),\ v_L(t))$ rappresenta la potenza del segnale (periodico) d'errore che si compie quando si approssima $v(t)$ con $v_L(t)$; la convergenza in media quadratica corrisponde al fatto che tale potenza tende a zero quando L diverge. Tuttavia, tale convergenza non assicura la convergenza puntuale.

In pratica, mentre per un segnale periodico $v(t)$ che soddisfi la famiglia di condizioni elencate prima della (2) (equivalentemente, della (6)) esiste lo sviluppo in serie di Fourier ed esso restituisce puntualmente (ad eccezione dei punti di discontinuità) il valore di $v(t)$, per un segnale periodico che sia solo a quadrato sommabile in un intervallo di lunghezza pari al periodo lo sviluppo in serie di Fourier è ancora possibile ma la serie converge solo in media quadratica alla $v(t)$.

2 Risposta di un sistema LTI ad un segnale periodico

Come si è visto in precedenza, un sistema LTI BIBO stabile causale con risposta in frequenza $W(j\omega)$ risponde a regime ad un ingresso sinusoidale causale

$$u(t) = \cos(\omega t)\delta_{-1}(t),$$

in condizioni di pura evoluzione forzata con una risposta a regime del tipo

$$y_{rp}(t) = |W(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(W(j\omega))).$$

Se ora pensiamo di far tendere l'istante iniziale $t_0 = 0$ a $-\infty$ è immediato rendersi conto del fatto che, al generico istante finito $t \in \mathbb{R}$, la componente transitoria dell'evoluzione si è già estinta e, pertanto, il sistema risponde all'ingresso sinusoidale (non causale) $u(t) = \cos(\omega t), t \in \mathbb{R}$, con il segnale d'uscita

$$y(t) = y_{rp}(t) = |W(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(W(j\omega))), t \in \mathbb{R}.$$

Generalizzando il precedente risultato, possiamo dire che, fissata una pulsazione $\omega_0 \in \mathbb{R}$, un sistema LTI BIBO stabile causale con risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, risponde ad un ingresso del tipo

$$u(t) = A\cos(k\omega_0 t + \phi), \qquad t \in \mathbb{R},$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, con

$$y(t) = A \cdot |W(jk\omega_0)| \cos\left(k\omega_0 t + \phi + \arg\left(W(k\omega_0)\right)\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Tale risultato si generalizza al caso di un segnale periodico reale. Infatti, una volta rappresentato tale segnale periodico in serie di Fourier trigonometrica, i.e.

$$u(t) = u_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| \cos\left(k\omega_0 t + \arg(u_k)\right),$$

applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene per la corrispondente uscita la seguente espressione

$$y(t) = W(j0)u_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |W(jk\omega_0)| \cdot |u_k| \cos\left(k\omega_0 t + \arg\left(u_k\right) + \arg\left(W(jk\omega_0)\right)\right),$$

dove si è tenuto conto sia del fatto che il sistema è reale, e quindi $W(j0)$ è reale, sia del fatto che l'ingresso $u(t)$ è reale. Pertanto un sistema LTI BIBO stabile risponde ad un segnale periodico di periodo T_0 con un segnale periodico di periodo T_0 e lo sviluppo in serie di Fourier dell'uscita è deducibile in modo immediato dallo sviluppo in serie dell'ingresso attraverso la precedente identità.

Chiaramente un'analoga relazione vale nel caso in cui, invece che alla serie di Fourier in forma trigonometrica, si faccia riferimento alla serie di Fourier in forma esponenziale del segnale di ingresso $u(t)$.

Vale infine la pena di evidenziare come, nel caso in cui applicassimo una versione causale del segnale periodico $u(t)$, il suo sviluppo in serie verrebbe sostituito dallo sviluppo in serie moltiplicato per il gradino e l'espressione sopra riportata per l'uscita rappresenterebbe in questo caso solo l'espressione della risposta (forzata) di regime permanente al segnale periodico causale $u(t)$.