Esercizi di Teoria dei Sistemi sul controllo in retroazione A.A. 2001/02

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).
\end{aligned}
$$

(1) Si progetti, se possibile, una matrice K tale che $F+GK$ abbia polinomio minimo $(z-\frac{1}{2})^4$.

(2) Si progetti se possibile, una retroazione dall'uscita $u(t) = Ky(t)$ tale che il polinomio minimo del sistema retroazionato sia $(z-\frac{1}{2})^4$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$
x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = [\,-2 \quad 1 \quad 1\,]\, x(t).
$$

Si determinino, se possibile, matrici di retroazione dallo stato K in modo tale che:

i) gli autovalori del sistema retroazionato siano $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$;

ii) in corrispondenza ad ogni stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato vada a zero in al più 1 passo;

iii) in corrispondenza ad ogni stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato vada a zero in al più 2 passi (e due passi siano necessari per almeno un $x(0)$);

iv) in corrispondenza ad ogni stato iniziale $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato vada a zero in al più 3 passi (e tre passi siano necessari per almeno un $x(0)$);

v) la risposta impulsiva del sistema retroazionato sia $\delta(t-1)$.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare discreto

$$
\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),
$$

si progetti, se possibile, un controllore dead-beat che agisca nel minor numero di passi possibile e soddisfi al seguente requisito aggiuntivo

i) agisca solo sul primo ingresso;

ii) agisca solo sul secondo ingresso;

iii) agisca su entrambi gli ingressi;

iv) agisca su entrambi gli ingressi, con l'ulteriore vincolo $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 4. Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad \text{con } F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sia Σ_K il sistema ottenuto per retroazione dallo stato con matrice di retroazione K. Si progettino, se possibile, delle matrici di retroazione K in modo tale che il Σ_K soddisfi ai seguenti vincoli:

i) Σ_K abbia solo modi periodici;

ii) per ogni condizione iniziale $x(0)$, l'evoluzione libera dello stato di Σ_K sia interamente contenuta in una retta passante per l'origine;

iii) per ogni condizione iniziale $x(0)$, l'evoluzione libera dello stato di Σ_K sia interamente contenuta in una retta;

iv) il sistema Σ_K abbia la proprietà che se $x(0) \in \text{span}\{e_1, e_2\}$ allora l'evoluzione libera di stato è combinazione lineare dei soli modi 1 e e^t, mentre se $x(0) \in \text{span}\{e_3\}$ allora l'evoluzione libera di stato è del tipo $x(t) = x(0)e^{-t}$ (Si ricorda che e_i rappresenta l'i-esimo vettore della base canonica, le cui componenti sono tutte nulle all'infuori della i-esima che è unitaria).

Esercizio 5. Dato il sistema lineare discreto

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),$$

si progetti, se possibile, una matrice di retroazione K tale che la matrice $F + GK$ del risultante sistema retroazionato abbia i seguenti polinomi invarianti:

i) $\psi_1(z) = z^4$;

ii) $\psi_1(z) = z^2$, $\psi_2(z) = \psi_3(z) = z$;

iii) $\psi_1(z) = z^2$, $\psi_2(z) = z^2$.

Con riferimento ai punti $i) \div iii)$ precedenti

iv) si dica in quali casi esiste una matrice $H \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ tale che il risultante sistema retroazionato $(F + GK, G, H)$ sia osservabile.

Esercizio 6. Si consideri il sistema dinamico lineare a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad t \geq 0,$$

con a parametro reale.

i) Si dimostri che per ogni $a \in \mathbb{R}$ il sistema risulta controllabile a zero, e

ii) si progetti, al variare di a, un controllore dead beat che annulli lo stato del sistema retroazionato nel minimo numero di passi.

Esercizio 7. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0$$

dove a è un parametro reale.

i) Al variare di a in $\mathbb{R}$, si calcoli esplicitamente, se esiste, un controllore K in retroazione che attribuisce alla matrice $F + gK$ del risultante sistema retroazionato lo spettro $\{0, 2, -1\}$.

ii) Si determini per quali valori di a il sistema è controllabile a zero (equivalentemente, ammette un controllore dead-beat), e

iii) per tali valori si determini, al variare di a e se possibile, la famiglia dei controllori dead-beat che rendono la matrice $F + gK$ del sistema retroazionato nilpotente con indice di nilpotenza minimo.