Esercizi di Teoria dei Sistemi
sullla connessione in serie e in parallelo
A.A. 2001/02

Esercizio 1. Si considerino le seguenti funzioni razionali

$$w_1(s) = \frac{s-2}{s^2+3s+2} \qquad w_2(s) = \frac{s+2}{s^2-s-2}.$$

i) Si costruiscano due sistemi a tempo continuo $\Sigma_i = (F_i, g_i, H_i), i = 1, 2$, che siano realizzazioni minime delle funzioni di trasferimento $w_1(s)$ e $w_2(s)$.

ii) Si scrivano esplicitamente le equazioni del sistema $\Sigma_p = (F_p, g_p, H_p)$, risultante dalla connessione in parallelo di Σ_1 e Σ_2. Si analizzino le proprietà di stabilità BIBO, stabilità interna e stabilizzabilità di Σ_p, e si discuta l'esistenza di stimatori asintotici dello stato per tale sistema.

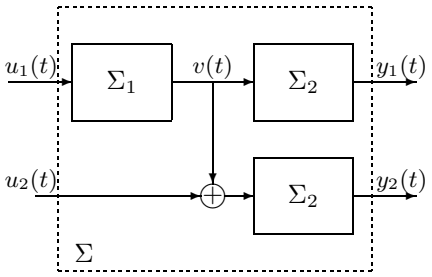
iii) Si scrivano esplicitamente le equazioni del sistema $\Sigma_s = (F_s, g_s, H_s)$, risultante dalla connessione in serie di Σ_1 e Σ_2 (nell'ordine). Si analizzino le proprietà di stabilità BIBO, stabilità interna e stabilizzabilità di Σ_s, e si discuta l'esistenza di stimatori asintotici dello stato per tale sistema.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti funzioni di trasferimento

$$w_1(z) = \frac{z+1}{(z+1/2)(z-3)} \qquad w_2(z) = \frac{z+1/2}{(z-1)(z-2)}.$$

i) Si determini per ciascuna di esse un sistema a tempo discreto, rispettivamente Σ_1 e Σ_2, che ne sia realizzazione minima.

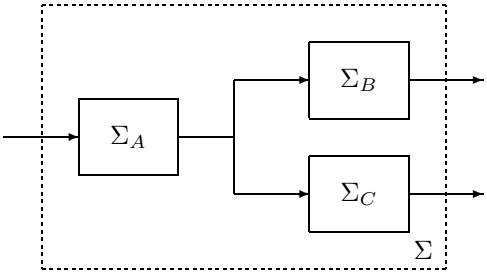
ii) Si consideri il sistema Σ ottenuto dalla connessione dei sistemi Σ_1 e Σ_2 come mostrato in figura.



Si scrivano esplicitamente le equazioni del sistema Σ e se ne discuta la raggiungibilità e l'osservabilità.

iii) È possibile progettare un regolatore asintotico e/o un regolatore dead-beat per il sistema Σ?

Esercizio 3. Sia Σ il sistema interconnesso ad un ingresso e due uscite descritto in figura.



con Σ_A, Σ_B e Σ_C realizzazioni minime delle rispettive funzioni di trasferimento (scalari). Sia Σ_P il parallelo di Σ_B e Σ_C, Σ_{s1} la serie di Σ_A e Σ_B, e, infine, Σ_{s2} la serie di Σ_A e Σ_C (considerate nell'ordine in cui compaiono). Si dimostri che:

(1) Se Σ_P, Σ_{s1} e Σ_{s2} sono realizzazioni minime delle loro funzioni di trasferimento, allora Σ è realizzazione minima della sua matrice di trasferimento.

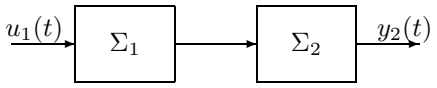
(2) Se Σ è realizzazione minima della sua matrice di trasferimento, allora Σ_P è realizzazione minima della sua funzione di trasferimento e Σ_{s1} e Σ_{s2} sono entrambe realizzazioni raggiungibili.

Esercizio 4. Siano $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1, D_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2, D_2)$ sistemi a tempo discreto, ad un ingresso e un'uscita.

i) Si dimostri che la serie di Σ_1 e Σ_2 è raggiungibile se e solo se Σ_1 e Σ_2 sono entrambi raggiungibili e i polinomi

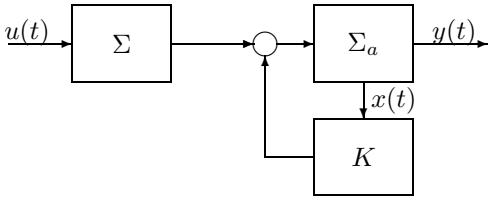
$$\det(zI - F_2) \qquad \text{e} \qquad n_1(z) := H_1 \mathrm{adj}(zI - F_1)g_1 + D_1 \det(zI - F_1)$$

sono privi di zeri comuni.



ii) Se Σ_1 e Σ_2 sono realizzazioni minime, si provi che la dimensione del sottospazio non raggiungibile del sistema serie è pari al numero di zeri comuni (ciascuno contato con la sua molteplicità) dei polinomi $\det(zI - F_2)$ e $n_1(z)$.

Esercizio 5. Sia data la connessione in serie descritta in figura:



dove Σ è realizzazione minima di $w(s) = \frac{s+1}{s^2}$, Σ_a rappresenta per ogni $a \in \mathbb{R}$ una realizzazione minima di $w_a(s) = \frac{s+2a}{(s-a)(s-2)}$ e K rappresenta una generica matrice di retroazione dallo stato di Σ.

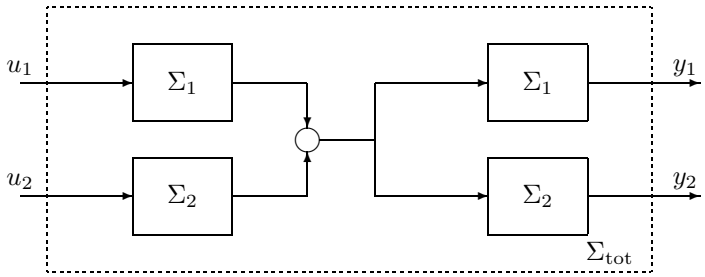
i) Per $K = 0$ studiare raggiungibilità ed osservabilità del sistema serie al variare di a in $\mathbb{R}$.

ii) Studiare raggiungibilità ed osservabilità del sistema serie al variare di a in $\mathbb{R}$ e della matrice di retroazione K.

Esercizio 6. Siano $\Sigma_1 = (F_1, g_1, H_1)$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ due sistemi a tempo continuo, realizzazioni minime delle due funzioni di trasferimento

$$w_1(s) = \frac{s-1}{s(s-2)} \qquad w_2(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}.$$

Si discuta raggiungibilità ed osservabilità del sistema interconnesso



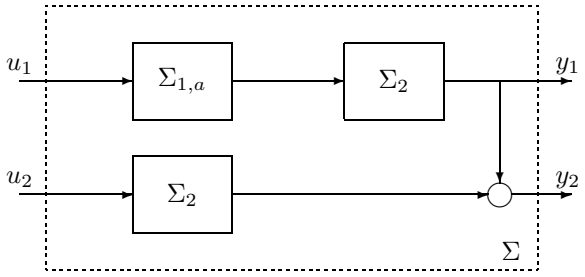
Esercizio 7. Si considerino le due funzioni di trasferimento

$$w_{1,a}(s) = \frac{s+a}{s^2 + (a+1)s + (2a-2)} \qquad w_2(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)},$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, due sistemi a tempo continuo $\Sigma_{1,a} = (F_{1,a}, g_{1,a}, H_{1,a})$ e $\Sigma_2 = (F_2, g_2, H_2)$ che siano realizzazioni minime rispettivamente di $w_{1,a}(s)$ e di $w_2(s)$.

Si consideri il seguente sistema dinamico Σ, ottenuto dalla connessione di $\Sigma_{1,a}$ e di due copie di Σ_2, come mostrato in figura.



ii) Si studi, al variare di a, la raggiungibilità e l'osservabilità di Σ.

iii) Si studi, al variare di a, la stabilità BIBO di Σ.