Esercizi di Teoria dei Sistemi sull'Analisi Modale
A.A. 2001/02

Esercizio 1. Dati i seguenti modi elementari

$$\{1\}_{t\geq 0}, \qquad \left\{\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}\right\}_{t\geq 0}, \qquad \{2^t\}_{t\geq 0},$$

si determinino due modelli di stato a tempo discreto e autonomi, Σ_1 e Σ_2, di dimensione 4, le cui matrici di sistema, F_1 e F_2, non siano simili tra loro e che presentino tutti e soli i modi prima elencati. Di tali matrici F_1 ed F_2 si determinino i polinomi invarianti.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione:

$$x(t+1) = Fx(t) + gu(t), \qquad t \geq 0,$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

i) Si determini la forma di Jordan della matrice F, i modi elementari del sistema e il loro carattere (convergente/limitato/non limitato);

ii) si determini, facendo uso delle serie formali di potenze, l'evoluzione forzata dello stato del sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ -3 & t = 1 \\ 0 & \text{per ogni } t > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dalle seguenti equazioni alle differenze:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) &&= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) &&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini la forma di Jordan della matrice F, i modi elementari del sistema e il loro carattere (convergente/limitato/non limitato);

ii) si determini la serie formale di potenze del segnale di uscita corrispondente alle seguenti condizioni:

- $x(0) = [\,0 \quad 1\,]^T$ e $u(t) = a^t, t \geq 0$, con a che varia sui reali;
- $x(0) = [\,2 \quad 1\,]^T$ e $u(t) = ta^t + 1, t \geq 0$, con a che varia sui reali.

iii) Si determini per quali condizioni iniziali $x(0)$ l'evoluzione libera dello stato è interamente contenuta in una retta passante per l'origine.

Esercizio 4. Si consideri il sistema a tempo continuo descritto, in evoluzione libera, dalla seguente equazione:

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad t \geq 0,$$

dove

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) Si determinino i modi elementari del sistema e se ne determini il carattere (convergente/limitato/non limitato);

ii) si determini l'evoluzione libera del sistema a partire da ciascuna delle seguenti condizioni iniziali:

- $x(0) = [\,2 \quad -1 \quad 1\,]^T$;
- $x(0) = [\,1 \quad 1 \quad 2\,]^T$;
- $x(0) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]^T$.

Esercizio 5. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico a tempo continuo, di dimensione n. Si risponda alle seguenti domande, fornendo un'adeguata giustificazione:

i) per quale valore minimo di n tra i modi di Σ ci possono essere $t sin t$ e te^{2t}?

ii) Se i modi distinti del sistema sono (tutti e soli) $te^{-2t}, e^{-2t}, t^2e^{-t}, te^{-t}, e^{-t}$, qual'è il massimo valore di n compatibile con le ipotesi sul sistema?

Esercizio 6. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\,1 \quad 0\,]\, x(t), \qquad\qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini la trasformata di Laplace $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ del segnale di uscita $y(t)$, in corrispondenza alle seguenti condizioni:

- $x(0) = [\,1 \quad 0\,]^T$ e $u(t) = e^{-t}, t \geq 0$;
- $x(0) = [\,0 \quad 0\,]^T$ e $u(t) = t + e^{-2t}, t \geq 0$.

ii) Si determini, attraverso l'uso delle trasformate di Laplace il segnale di ingresso corrispondente al segnale di uscita, in evoluzione forzata, $y(t) = te^t, t \geq 0$.