Esercizi di Teoria dei Sistemi sull'osservabilità
A.A. 2001/02

Esercizio 1. Dato il sistema a tempo discreto e privo di ingressi

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} x(t), \qquad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & -2a & 2a \end{bmatrix} x(t),$$

dove a è un parametro reale, si supponga che lo stato iniziale $x(0)$ sia incognito e che siano noti i valori dell'uscita $y(t)$ per $t = 0, 1, 2, \ldots$.

i) Si verifichi se è possibile determinare $x(0)$ a partire dalle uscite $y(t)$ per $t = 0, 1, 2$;

ii) si verifichi se è possibile determinare $x(3)$ a partire dalle uscite $y(t)$ per $t = 0, 1, 2$;

iii) si verifichi se è possibile determinare $x(0)$ a partire dalle uscite $y(t)$ per $t = 0, 1$;

iv) si verifichi se è possibile determinare $x(2)$ a partire dalle uscite $y(t)$ per $t = 0, 1$.

Esercizio 2. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico lineare a tempo continuo di dimensione 6, avente come matrice del sistema

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

dove λ_1, λ_2 e λ_3 sono parametri a valori reali.

i) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3, i modi del sistema.

ii) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3, il numero minimo $p^* = p^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, di uscite necessarie per rendere osservabile il sistema.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = [\,0 \quad 1 \quad 0\,],$$

si supponga di osservare $u(0), u(1), u(2), y(0), y(1)$ e $y(2)$, ma di non conoscere lo stato inizale $x(0)$.

i) Per quali $t \in \{0, 1, 2, 3\}$ è possibile calcolare lo stato $x(t)$?

ii) Per tali valori di t si calcoli esplicitamente $x(t)$.

Esercizio 4. Sia dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) \qquad y(t) = Hx(t),$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\,-1 \quad 1\,].$$

(1) Si calcoli, se possibile, lo stato iniziale $x(0)$, supponendo di misurare nell'intervallo $[0, 1]$ le funzioni $u(t) = 0$ e $y(t) = 6e^{-t} - 4$.

(2) Si progetti una matrice K in modo tale che il sistema reazionato ottenuto ponendo $u(t) = Kx(t) + v(t)$ fornisca un'uscita in evoluzione libera contenente solo il modo e^{-t} qualunque sia $x(0)$.

(3) Con riferimento al sistema reazionato progettato al punto precedente, si calcolino tutti gli stati iniziali $x(0)$ compatibili con l'osservazione nell'intervallo $[0, 1]$ dei segnali $v(t) = 0$ e $y(t) = e^{-t}$.

Esercizio 5. Si consideri un sistema lineare continuo Σ di equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

i) Si provi che Σ è osservabile se e solo se è ricostruibile.

ii) Se Σ è osservabile e sono note sull'intervallo $[0, 1]$ la funzione d'ingresso $\bar{u}(\cdot)$ e la funzione d'uscita $y(\cdot)$, corrispondente a $\bar{u}(\cdot)$ e allo stato iniziale incognito $x(0) = \bar{x}_0$, si determini il valore di $x(0) = \bar{x}_0$

iii) Si provi che le funzioni di uscita in evoluzione libera sull'intervallo $[0, 1]$ costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione pari a quella del sottospazio osservabile di Σ

Esercizio 6. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1/3 \quad 4/3 \quad 1\,]\, x(t) \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si studi l'osservabilità del sistema e si determinino esplicitamente l'insieme degli stati non osservabili in $[0, 1]$, l'insieme degli stati non osservabili in $[1, 2]$ e, infine, l'insieme degli stati non osservabili in $[0, 2]$.

ii) Si progetti, se possibile, un ingresso di controllo in retroazione dallo stato in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia asintoticamente stabile e il suo sottosistema non osservabile abbia come unico autovalore $\lambda = -1/3$.