Esercizi di Teoria dei Sistemi su Raggiungibilità e Controllabilità – A.A. 2001/02

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t),$$

che si suppone caratterizzato da tre autovalori reali distinti $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$.

i) Supponendo di applicare, a partire da $x(0) = 0$, l'ingresso $u(0) = 1$, $u(t) = 0$ per $t > 0$, si determini il vettore asintotico

$$v := \lim_{t \to +\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|}.$$

ii) Si determini l'ingresso $u(\cdot)$ che permette il raggiungimento di $x(t) = v$ a partire da $x(0) = 0$ nel minor numero di passi possibile.

iii) Si generalizzi il risultato precedente ad un generico sistema completamente raggiungibile, con un solo ingresso, di dimensione n, provando che se esso é dotato di autovettore dominante, allora il raggiungimento di v da 0 richiede sempre esattamente n passi.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un ingresso $u(\cdot)$, nullo per $t \geq 2$, tale che scegliendo $x(0) = 0$ si abbia $y(t) = a2^t$, per ogni $t \geq 2$.

ii) Si determini al variare di a in $\mathbb{R}$, ove possibile, un ingresso di controllo che mandi a zero lo stato inziale $x(0) = \begin{bmatrix} a & 1 & a(a-1) \end{bmatrix}^T$ nel minimo numero di passi.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x(t) \qquad t \geq 0 \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i) Si calcoli un ingresso $u(\cdot)$, capace di rendere nullo lo stato $x(0)$ al tempo $t = 1$.

ii) Si calcoli, tra tutti gli ingressi capaci di rendere nulla l'uscita y all'istante $t = 1$, quello caratterizzato dal minor valore del seguente integrale:

$$\int_0^1 u^2(t)dt.$$

Esercizio 4. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0. \\ y(t) &= [1 \quad 1 \quad 1]\, x(t), \end{aligned}$$

i) Si determini, se esiste, una sequenza di ingresso $u(0), u(1)$ capace di trasferire lo stato iniziale $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ nello stato finale $x(2) = [0 \quad 0 \quad 8]^T$.

ii) Si determini, se esiste, una sequenza di ingresso $u(0), u(1), u(2)$ capace di trasferire lo stato iniziale $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ nello stato finale $x(3) = [0 \quad 0 \quad 8]^T$.

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad t \geq 0.$$

i) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che porti lo stato del sistema da $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ al tempo $t = 0$ a $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 + e^2 \end{bmatrix}$ al tempo $t = 1$.

ii) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che porti lo stato del sistema da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al tempo $t = 0$ a $\begin{bmatrix} 2 \\ e^4 \end{bmatrix}$ al tempo $t = 2$.

Esercizio 6. Si consideri il seguente sistema dinamico lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad 0]\, x(t) \qquad t \geq 0. \\ x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

i) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo che porti lo stato del sistema da $x(0)$ per $t = 0$ allo stato nullo per $t = 1$.

ii) Si determini, se possibile, un ingresso di controllo, con supporto in $[0, 1]$, in modo tale che per $t \geq 1$ l'uscita (in evoluzione libera) sia nulla ma lo stato del sistema (ancora in evoluzione libera) non lo sia.