Esercizi di Teoria dei Sistemi
sullla realizzazione e la stabilità BIBO
A.A. 2001/02

Esercizio 1. Si consideri il sistema a tempo discreto Σ descritto dalle matrici

$$F = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = [\,1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\,].$$

i) Si verifichi che Σ è BIBO stabile, ma non internamente stabile.

ii) Esistono matrici di retroazione dallo stato K tali che il risultante sistema retroazionato sia internamente stabile? E matrici di retroazione dallo stato tali che il risultante sistema retroazionato non sia più BIBO stabile?

Si giustifichino le risposte e, in caso di risposta affermativa, si trovino esplicitamente le matrici di retroazione.

iii) Si verifichi che non esiste alcuna retroazione dallo stato al secondo ingresso che renda convergenti a zero tutte le uscite in evoluzione libera del sistema retroazionato.

iv) Si determini una retroazione dallo stato al primo e al secondo ingresso che rende convergenti a zero tutte le uscite in evoluzione libera del sistema retroazionato.

Esercizio 2. Data la seguente funzione di trasferimento di un sistema a tempo discreto:

$$w(z) = \frac{z+a}{(z+1)^3}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

i) si costruisca, per ogni valore di a, una realizzazione minima di $w(z)$;

ii) in corrispondenza ad ogni realizzazione determinata al punto i), si calcoli un dead-beat controller;

iii) esiste per qualche valore di a una realizzazione minima di $w(z)$ la cui matrice F sia la seguente:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}?$$

Esercizio 3. Data una funzione di trasferimento scalare $w(s) = p(s)/q(s)$, con p e q polinomi coprimi, sia $\Sigma = (F, g, H)$ una sua realizzazione minima. Si consideri ora la seguente matrice di trasferimento di un sistema a due ingressi e due uscite

$$W^*(s) = \begin{bmatrix} w(s) & w(s) \\ w(s) & w(s) \end{bmatrix}.$$

È richiesto di:

i) costruire una realizzazione minima Σ^* di $W^*(s)$, utilizzando le matrici F, g e H;

ii) provare che la realizzazione Σ^* è raggiungibile a partire da un solo ingresso e osservabile da una sola uscita;

iii) costruire una seconda realizzazione Σ_2^* di $W^*(s)$, di dimensione doppia rispetto a quella di Σ^*, e che sia raggiungibile ma non osservabile [Suggerimento: si ricorra ad una opportuna connessione di due copie di Σ, e si faccia uso delle matrici F, g e H].

Esercizio 4. Si determini, al variare dei parametri reali a e b, una realizzazione minima della seguente matrice di trasferimento razionale propria:

$$W(s) = \begin{bmatrix} a/s^2 & b/s \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5. Data la seguente matrice di trasferimento razionale strettamente propria:

$$W(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z-2}{z(z+2)} \\ \dfrac{z-2}{z(z+3)} \end{bmatrix},$$

i) costruire una realizzazione minima Σ di $W(z)$;

ii) progettare, se possibile, una retroazione dallo stato per il sistema Σ in modo tale che il sistema retroazionato risulti non osservabile e tutte le evoluzioni di uscita siano nulle per $t \geq 2$.

Esercizio 6. Si dimostri che, detto $\Sigma = (F, G, H)$ un generico sistema dinamico di dimensione n, sia nel caso in cui esso sia raggiungibile che nel caso in cui esso sia non raggiungibile, esiste una retroazione dallo stato K di modo tale che il risultante sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + GK, G, H)$ risulti BIBO stabile.

Esercizio 7. Si consideri un sistema dinamico lineare a tempo discreto SISO $\Sigma = (F, g, H)$. Supponendo che in corrispondenza al segnale di ingresso

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ b^{t-1}(b-a) & t \geq 1 \end{cases}$$

a e b parametri reali, il sistema risponda, in sola evoluzione forzata, con il segnale di uscita

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ -2\left(-\frac{1}{2}\right)^{t-1} & t \geq 2 \end{cases}$$

Si determini per quali valori della coppia a e b posso dire che il sistema Σ è BIBO stabile.