Esercizi di Teoria dei Sistemi sulla stabilità
A.A. 2001/2002

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= (a-1)x_2(t) + a(x_1(t) - x_2(t))^3 \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - ax_2(t) + ax_1^3(t) + a(x_1(t) - x_2(t))^3 \,, \qquad t \geq 0,\end{aligned}$$

con a parametro reale. Si studi, al variare di a, la stabilità dell'equilibrio nell'origine, ricorrendo al metodo della linearizzazione o, quando necessario, utilizzando la funzione

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + (x_1 - x_2)^4 \,.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= (1+\alpha)^2 x_1(t) - x_1(t)x_2^2(t), \\ x_2(t+1) &= (1-\alpha^2)x_2(t) - x_1^2(t)x_2(t),\end{aligned} \qquad t \geq 0,$$

dove α è un parametro reale.

i) Si determinino, al variare di α, i punti di equilibrio del sistema.

ii) Quando possibile, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine con il metodo di linearizzazione.

iii) Per i valori critici del parametro α, si discuta la stabilità asintotica e, quando possibile, la stabilità semplice dell'equilibrio nell'origine ricorrendo o all'analisi delle traiettorie oppure alla funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 3. Sia dato il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \qquad t \geq 0, \qquad \text{con} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

i) Determinare l'insieme di tutte e sole le matrici P, definite positive, a cui corrisponde, tramite l'equazione di Lyapunov, una matrice Q diagonale e definita positiva.

ii) Sia P una matrice diagonale e definita positiva, e si consideri la funzione di Lyapunov $V(x) := x^T P x$. Si discuta al variare di P la stabilità del precedente sistema lineare, ricorrendo ai vari criteri noti.

Esercizio 4. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1^3(t) - 2x_1(t)x_2(t), \qquad t \geq 0.\end{aligned}$$

(1) Si determinino tutti i punti di equilibrio e se ne studi la stabilità ricorrendo al metodo della linearizzazione;

(2) utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^2$, si determini la stabilità o meno del punto di equilibrio nell'origine.

(3) utilizzando la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$, si determini la struttura delle traiettorie del sistema e si determini quindi la stabilità o meno di tutti gli altri punti di equilibrio.

Esercizio 5. Si consideri il sistema a tempo continuo di dimensione n

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t) \qquad\qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si dimostri che se esiste una matrice P simmetrica e definita positiva per la quale vale l'identità

$$F^T P + PF = \begin{bmatrix} -I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

allora il sistema è (almeno) semplicemente stabile.

ii) Si dimostri che se esiste una matrice P simmetrica e definita positiva per la quale si ha

$$(F^T P + PF)x = -x, \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

allora il sistema è asintoticamente stabile.

iii) Si dimostri che se il sistema asintoticamente stabile ed esiste una matrice P simmetrica e definita positiva per la quale vale l'identità

$$F^T P + PF = -H^T H,$$

allora il sistema è osservabile.

Esercizio 6. Si consideri il seguente sistema dinamico non lineare a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a x_1(t) - x_1^3(t) + x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2a^2 x_2(t) - 2x_1(t)x_2(t), \qquad\qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

dove a é un parametro reale.

i) Determinare, al variare di a in $\mathbb{R}$, i punti di equilibrio del sistema.

ii) Si studi, al variare di a in $\mathbb{R}$, la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso il metodo di linearizzazione, e,

iii) nei casi critici, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine attraverso la seguente famiglia di funzioni: $V_k(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{k}{2}\, x_2^2$, con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\alpha)x_1(t), \\ x_2(t+1) &= x_1^2(t) + (1-\alpha^2)x_2(t), \end{aligned} \qquad t \geq 0,$$

dove α è un parametro reale.

i) Si determinino i punti di equilibrio del sistema al variare del parametro α e, quando possibile, se ne studi la stabilità con il metodo di linearizzazione.

ii) Per i valori critici del parametro α, si studi la stabilità dell'equilibrio nell'origine mediante l'analisi delle traiettorie del sistema.