Esercizi di Teoria dei Sistemi
sul problema della stima e della regolazione
A.A. 2001/02

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato tale che $e(0) \in \text{span}\,\{e_1, e_4\}$ implichi $e(t) = \frac{e(0)}{2^t}$ ed inoltre, comunque sia scelto $e(0)$, $e(t)$ tenda a zero più rapidamente di $\left(\frac{2}{3}\right)^t$.

Esercizio 2. Dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) \qquad y(t) = Hx(t),$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [\,0 \quad 1\,],$$

(1) si progetti un controllore in retroazione K tale che il risultante sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + gK, g, H)$ sia non osservabile ed abbia e^{-2t} tra i suoi modi.

(2) Si progetti uno stimatore asintotico per Σ_K e se ne scrivano esplicitamente le equazioni.

(3) Si progetti un regolatore asintotico stabilizzante per Σ, che utilizzi, se possibile, lo stesso controllore utilizzato al punto (1) (ed un opportuno stimatore asintotico), e se ne scrivano esplicitamente le equazioni.

Esercizio 3. Dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,0 \quad 1 \quad 1\,]\, x(t) \end{aligned}$$

(1) Si progetti un controllore dead-beat per Σ che azzeri lo stato nel minor numero posibile di passi.

(2) Si progetti uno stimatore dead-beat per Σ che azzeri l'errore di stima nel minor numero posibile di passi.

(3) Si scrivano le equazioni di un regolatore per Σ che utilizzi il controllore dead-beat e lo stimatore dead-beat progettati ai punti (1) e (2).

Esercizio 4. Dato il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned}$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = [\,0 \quad 1 \quad 0\,].$$

i) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico il cui errore di stima $e(t)$ soddisfi l'equazione

$$e(t+2) = \frac{1}{4}e(t), \qquad \forall t \geq 0$$

qualunque sia la condizione iniziale $e(0)$.

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico il cui errore di stima $e(t)$ soddisfi l'equazione

$$e(t+2) = \frac{1}{4}e(t), \qquad \forall t \geq 1$$

qualunque sia la condizione iniziale $e(0)$.

Esercizio 5. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [\,1 \quad -1 \quad 0\,]\, x(t) \end{aligned}$$

i) si progetti, se possibile, uno stimatore dello stato il cui errore di stima abbia sempre un'evoluzione di tipo periodico.

ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei modi

$$e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}.$$

Esercizio 6. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \\ y(t) &= [\,1 \quad 0 \quad -1\,]\, x(t) = Hx(t), \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

i) Si dimostri l'esistenza di stimatori dead-beat per il sistema e se ne fornisca una parametrizzazione completa.

ii) Si dimostri che, in generale, per il sistema sopra descritto, uno stato x_0 é indistinguibile dallo stato nullo in $[t, T]$, con $T - t \geq 2$, $t \geq 0$, se e solo se lo é in $[t, t+2]$? É vero che x_0 é indistinguibile dallo stato nullo in $[t, T]$, con $T - t \geq 2$, $t \geq 0$, se e solo se lo é in $[T-2, T]$?