

IV RACCOLTA DI ESERCIZI DI ANALISI DEI SISTEMI A.A. 2009/10

Esercizio 1. Sia $\Sigma = (F, G, H)$ un sistema dinamico lineare a tempo continuo di dimensione 6, avente come matrice del sistema

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

dove λ_1, λ_2 e λ_3 sono parametri a valori reali.

- i) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3 , i modi del sistema.
- ii) Si determinino, al variare di λ_1, λ_2 e λ_3 , il numero minimo $p^* = p^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, di uscite necessarie per rendere osservabile il sistema.

Esercizio 2. Sia dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) \quad y(t) = Hx(t),$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [-1 \quad 1].$$

Si progetti una matrice K in modo tale che il sistema reazionato ottenuto ponendo $u(t) = Kx(t) + v(t)$ fornisca un'uscita in evoluzione libera contenente solo il modo e^{-t} qualunque sia $x(0)$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato tale che $e(0) \in \langle e_1, e_4 \rangle$ implichi $e(t) = \frac{e(0)}{2^t}$ ed inoltre, comunque sia scelto $e(0)$, $e(t)$ tenda a zero più rapidamente di $(\frac{2}{3})^t$.

Esercizio 4. Dato il sistema a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + gu(t) \quad y(t) = Hx(t),$$

con

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [0 \quad 1],$$

- (1) si progetti un controllore in retroazione K tale che il risultante sistema retroazionato $\Sigma_K = (F + gK, g, H)$ sia non osservabile ed abbia e^{-2t} tra i suoi modi.
- (2) Si progetti uno stimatore asintotico per Σ_K e se ne scrivano esplicitamente le equazioni.

- (3) Si progetti un regolatore asintotico stabilizzante per Σ , che utilizzi, se possibile, lo stesso controllore utilizzato al punto (1) (ed un opportuno stimatore asintotico), e se ne scrivano esplicitamente le equazioni.

Esercizio 5. Dato il sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [0 \quad 1 \quad 1]x(t) \end{aligned}$$

- (1) Si progetti un controllore dead-beat per Σ che azzeri lo stato nel minor numero possibile di passi.
- (2) Si progetti uno stimatore dead-beat per Σ che azzeri l'errore di stima nel minor numero possibile di passi.
- (3) Si scrivano le equazioni di un regolatore per Σ che utilizzi il controllore dead-beat e lo stimatore dead-beat progettati ai punti (1) e (2).

Esercizio 6. Dato il sistema a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + gu(t) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= Hx(t) = [1 \quad -1 \quad 0]x(t) \end{aligned}$$

- i) si progetti, se possibile, uno stimatore dello stato il cui errore di stima abbia sempre un'evoluzione di tipo periodico.
- ii) Si progetti, se possibile, uno stimatore asintotico dello stato il cui errore di stima evolva come combinazione lineare dei modi

$$e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}.$$

Esercizio 7. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = Fx(t) + gu(t), \\ y(t) &= [1 \quad 0 \quad -1]x(t) = Hx(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

- i) Si dimostri l'esistenza di stimatori dead-beat per il sistema e se ne fornisca una parametrizzazione completa.
- ii) Si progetti un controllo in retroazione in modo tale che il risultante sistema retroazionato sia osservabile e, per tale sistema Σ_K , si progetti uno stimatore asintotico il cui errore di stima, per $t \gg 0$, evolva come $(\frac{1}{2})^t$.