

Sintesi per tentativi e controllori PID

Note per le lezioni del corso di

“Controlli Automatici” - A.A. 2006/2007

Prof.ssa Maria Elena Valcher

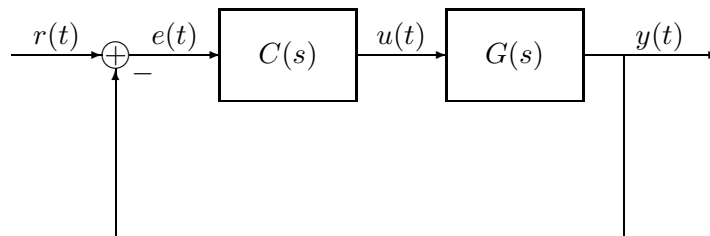
1 Ipotesi di partenza e specifiche di controllo (in frequenza sulla funzione di trasferimento in catena aperta)

Consideriamo un processo lineare e tempo-invariante, di funzione di trasferimento razionale e propria $G(s) \in \mathbb{R}(s)$. Supponiamo che $G(s)$ abbia tutti i poli nel semipiano reale negativo aperto tranne, al più, un eventuale polo nell'origine di molteplicità arbitraria, ovvero

$$G(s) = \frac{K_B(G)}{s^i} \cdot G_1(s),$$

con $K_B(G)$ il guadagno di Bode di $G(s)$, i un numero intero non negativo (eventualmente nullo), $G_1(0) = 1$.

Vogliamo progettare un controllore lineare e tempo-invariante, di funzione di trasferimento razionale e propria $C(s) \in \mathbb{R}(s)$, a sua volta dotato di poli in $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) < 0\} \cup \{0\}$, in modo tale che il sistema retroazionato di figura



di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)},$$

sia BIBO stabile e siano raggiunti i seguenti obiettivi di controllo:

1. il sistema retroazionato $W(s)$ sia di tipo k e
2. risponda al segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t)$ con errore di regime permanente (costante e non nullo) e_{rp} non superiore ad un massimo valore tollerato e_{rp}^* ;
3. la pulsazione di attraversamento ω_A della funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ approssimi un valore desiderato ω_A^* e
4. il margine di fase di $C(s)G(s)$ (alla pulsazione $\omega_A \approx \omega_A^*$) sia maggiore o uguale ad un valore minimo auspicato m_ψ^* . Tipicamente, considerazioni sul picco di risonanza della $W(j\omega)$ a cui il margine di fase è legato, suggeriscono per m_ψ^* un valore pari almeno a 45° .

2 Progettazione preliminare del controllore al fine di soddisfare i vincoli su tipo ed errore di regime permanente

Per prima cosa è conveniente attribuire al controllore $C(s)$ una struttura preliminare, atta a soddisfare i vincoli su tipo ed errore permanente. Specificatamente, se viene chiesto che il sistema retroazionato sia di tipo k è necessario portare la molteplicità del polo nell'origine al valore k . Di norma è ragionevole ipotizzare che $k \geq i$ (i la molteplicità del polo nell'origine del processo di partenza). Se questo non è il caso, ovvero i è maggiore di k , possiamo assumere che le specifiche sul tipo e sull'errore di regime permanente al segnale $\delta_{-(k+1)}(t)$ siano automaticamente soddisfatte e possiamo quindi passare al passo successivo (soddisfacimento delle specifiche su pulsazione di attraversamento e margine di fase).

Se $k \geq i$ allora è sufficiente attribuire al controllore $C(s)$ un polo nell'origine di molteplicità $k - i$. A questo punto è importante selezionare il guadagno di Bode di $C(s)$ in modo da soddisfare il vincolo sull'errore di regime permanente¹. Se $k = 0$ allora da

$$e_{rp} = \frac{1}{1 + K_B(C)K_B(G)} \leq e_{rp}^*$$

segue immediatamente la condizione

$$K_B(C) \geq K^* := \frac{1}{K_B(G)} \left[\frac{1}{e_{rp}^*} - 1 \right].$$

Se, invece, $k \geq 1$ allora da

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)} \leq e_{rp}^*$$

¹Si noti che il guadagno di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$, altro non è che il prodotto dei due guadagni di Bode di $C(s)$ e $G(s)$, rispettivamente $K_B(C)$ e $K_B(G)$. Inoltre nel seguito assumeremo sempre $K_B(G) > 0$ e progetteremo $K_B(C)$ in modo che sia a sua volta positivo. Se questo non è il caso è sufficiente imporre che anche $K_B(C)$ sia negativo e impiegare, nelle formule successive, i valori assoluti di $K_B(C)$ e $K_B(G)$.

segue

$$K_B(C) \geq K^* := \frac{1}{K_B(G)} \cdot \frac{1}{e_{rp}^*}.$$

In prima battuta è consuetudine scegliere $K_B(C) = K^*$ (eventualmente arrotondato per eccesso) e attribuire, quindi, al controllore la struttura preliminare

$$C'(s) = \frac{K^*}{s^{k-i}}.$$

La scelta di assumere inizialmente il minimo valore del guadagno di Bode compatibile con le specifiche è dovuta al fatto che valori troppo elevati del guadagno possono far insorgere, in fase transitoria, segnali $u(t)$, in ingresso al processo, di ampiezza troppo elevata. Segnali di ampiezza eccessiva possono produrre, nel sistema reale, sia fenomeni di “rottura” (si pensi ad una corrente troppo elevata imposta ai morsetti di ingresso di un componente elettrico) sia fenomeni di “saturazione” (gli attuatori che forniscono i segnali di ingresso al processo possono non essere in grado di arrivare ai livelli di segnale nominalmente richiesti). Entrambi i fenomeni sono particolarmente indesiderabili e vanno evitati ad ogni costo.

3 Soddisfacimento delle specifiche su pulsazione di attraversamento e margine di fase

Una volta determinata la struttura preliminare del controllore $C(s)$, andiamo a graficare i diagrammi di Bode (ampiezza e fase) di $C'(s)G(s)$ al fine di valutare la pulsazione di attraversamento effettiva ω_A e la quantità

$$m_\psi(\omega_A^*) := \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)) + 180^\circ,$$

che rappresenta il margine di fase che avrei se invece della pulsazione di taglio effettiva, ω_A , avessi come pulsazione di attraversamento proprio ω_A^* .

Se $\omega_A \approx \omega_A^*$ e $m_\psi \approx m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$ chiaramente il controllore preliminare da noi determinato permette già il soddisfacimento delle specifiche e pertanto possiamo assumere $C(s) = C'(s)$.

Se questo non è il caso, allora sono necessarie ulteriori azioni di controllo, azioni che dipendono da quale delle seguenti situazioni si sta verificando:

- (i) $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$;
- (ii) $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$;
- (iii) $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$;
- (iv) $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$.

3.1 Caso (i): $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) \geq m_\psi^*$

Se questo è il caso, il problema è risolvibile “alzando il diagramma delle ampiezze” e lasciando inalterato il diagramma delle fasi. È evidente come ciò possa essere effettuato semplicemente incrementando il guadagno di Bode $K_B(C)$ fino a garantire che la pulsazione di attraversamento coincida con ω_A^* . In termini matematici ciò equivale a imporre

$$|C(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)| = \left| \frac{K_B(C)}{(j\omega_A^*)^{k-i}} \cdot G(j\omega_A^*) \right| = 1,$$

ovvero

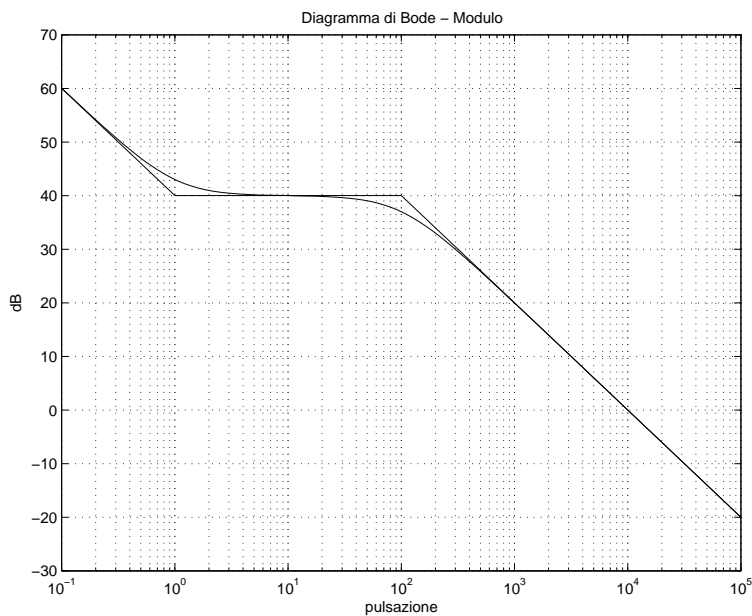
$$K_B(C) = \frac{(\omega_A^*)^{k-i}}{|G(j\omega_A^*)|}.$$

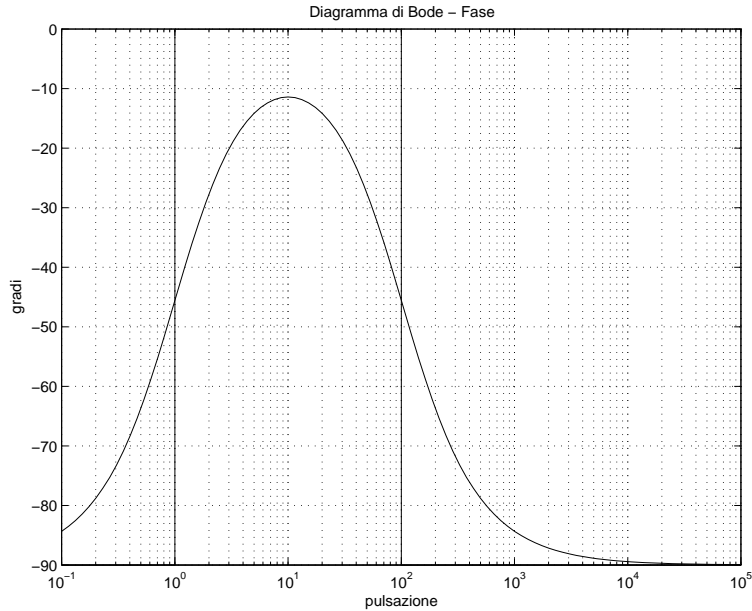
Val la pena di evidenziare che in tal modo non viene alterato il rispetto delle specifiche su tipo ed errore di regime permanente, dal momento che la molteplicità del polo nell'origine non viene modificata e il guadagno di Bode viene accresciuto, portando in tal modo ad un errore di regime permanente ancora più piccolo di e_{rp}^* .

Esempio 1 Sia

$$C'(s)G(s) = 100 \cdot \frac{1+s}{s(1+0.01s)}$$

i cui diagrammi di Bode sono i seguenti:





e supponiamo che le specifiche siano $\omega_A^* = 10^5$ rad/s e $m_\psi^* = 60^\circ$. Si ha allora 10^4 rad/s = $\omega_a < \omega_A^*$ e $90^\circ \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^*$. È evidente allora che alzando il (solo) diagramma delle ampiezze di 20 dB è possibile ottenere il risultato desiderato. Ciò equivale a moltiplicare per 10 il guadagno di Bode del sistema in catena aperta, ottenendo in tal modo

$$C(s)G(s) = 1000 \cdot \frac{1 + s}{s(1 + 0.01s)}$$

3.2 Caso (ii): $\omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^*$

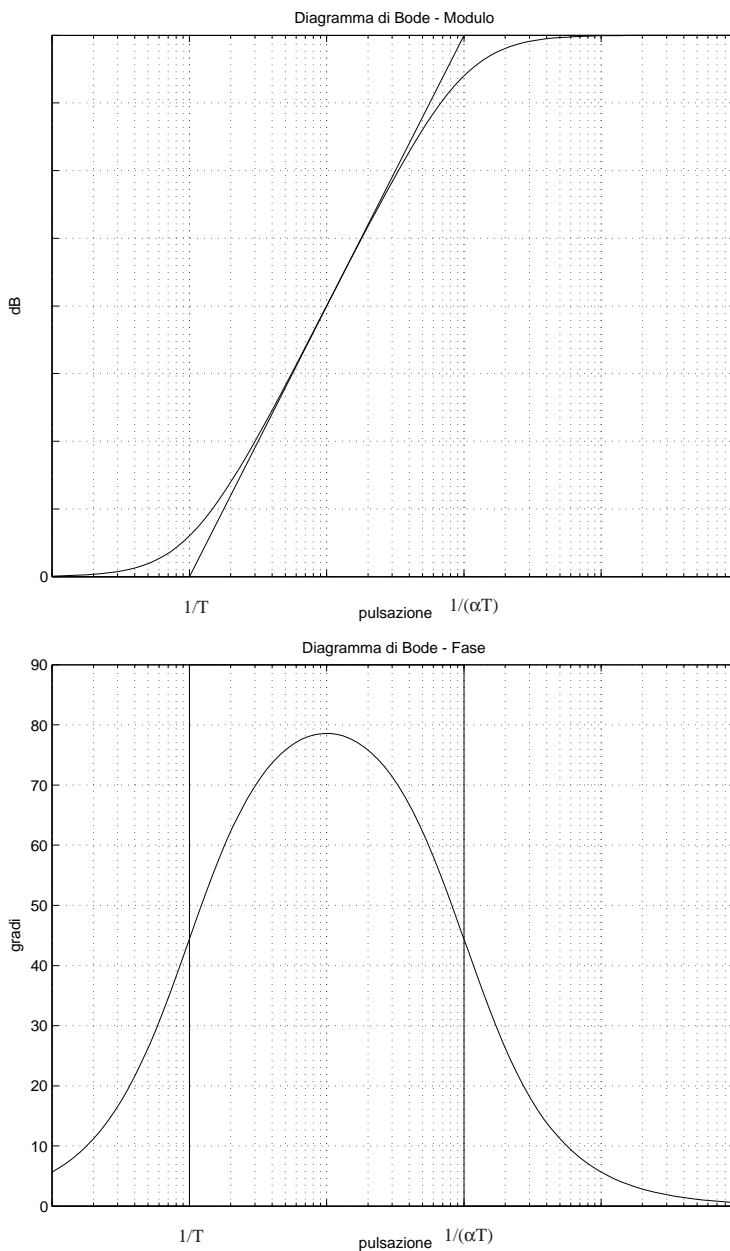
Una situazione di questo tipo corrisponde al caso in cui la pulsazione di attraversamento si trova alla sinistra della pulsazione di attraversamento desiderata e il margine di fase è inferiore al margine di fase desiderato e può essere risolta “sollevando” entrambi i diagrammi, sia quello delle ampiezze che quello delle fasi. Tale operazione può essere intuitivamente realizzata inserendo opportunamente, attraverso il controllore, uno o più zeri reali negativi in posizione opportuna. L’aggiunta di uno zero “stabile” nella funzione di trasferimento in catena aperta, infatti, incrementa di 20 dB/decade le pendenze dei diversi tratti del diagramma asintotico delle ampiezze che stanno alla sua destra, spostando in tal modo verso destra la pulsazione di attraversamento. Per quanto concerne il diagramma delle fasi, invece, uno zero stabile incrementa la fase di 90° (dal punto di spezzamento ad esso relativo in poi) e porta, quindi, ad un incremento del margine di fase.

Se vogliamo realizzare quest’operazione di sollevamento attraverso un controllore proprio possiamo ricorrere ad una **rete anticipatrice**. Una rete anticipatrice viene descritta da una funzione razionale propria con uno zero reale negativo ed un polo reale negativo

collocato alla sua destra. In termini matematici

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + sT}{1 + \alpha sT}, \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

I diagrammi di Bode corrispondenti a una rete anticipatrice sono i seguenti:



La scelta dei parametri T e α può essere effettuata “ad occhio”, con l’obiettivo di far coincidere la nuova pulsazione di attraversamento con la pulsazione desiderata ω_A^* e di

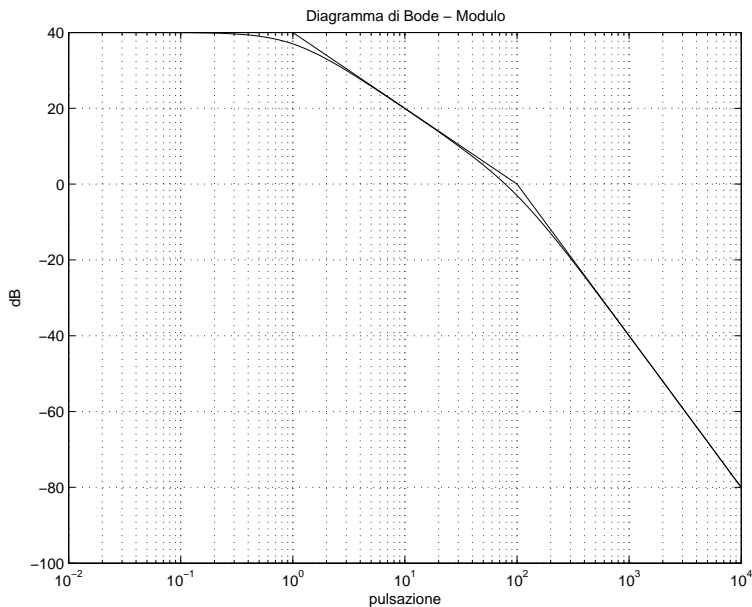
incrementare la fase in modo da rispettare il margine di fase minimo richiesto. In generale, tuttavia, non è detto che tale obiettivo sia perseguibile attraverso l'impiego di una sola rete anticipatrice. Questo è evidente se $m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* - 90^\circ$, giacché una singola rete anticipatrice può portare ad un incremento di fase di al più 90° .

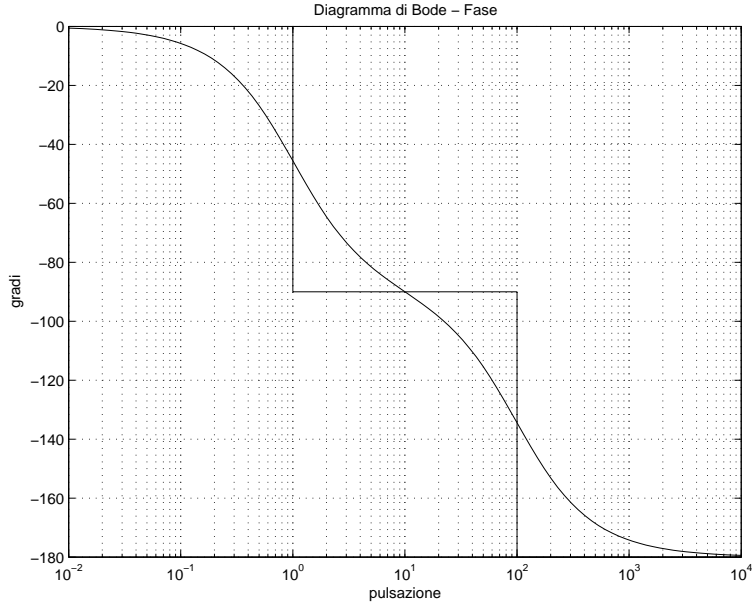
Se ci limitiamo al caso in cui una singola rete anticipatrice è in grado di sistemare i problemi di fase e quindi i problemi di pulsazione di attraversamento, la scelta dei parametri può essere effettuata attraverso il ricorso alle tabelle riportate in fondo. Le tabelle vanno impiegate nel seguente modo: una volta valutato il valore di $|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{dB}$, che è sicuramente negativo, dal momento che $\omega_A < \omega_A^*$, e il margine di fase alla pulsazione ω_A^* , $m_\psi(\omega_A^*)$, che è per ipotesi inferiore al valore auspicato m_ψ^* , andiamo a ricercare nelle due tabelle due valori di u e α che corrispondano nella tabella delle ampiezze al valore $-|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{dB}$ e nella tabella delle fasi ad un valore maggiore o uguale a $m_\psi^* - m_\psi(\omega_A^*)$. Posto $T = \frac{u}{\omega_A^*}$, abbiamo ottenuto entrambi i parametri della rete anticipatrice che realizza le due operazioni di sollevamento cercate.

Esempio 2 Sia

$$C'(s)G(s) = \frac{100}{(1+s)(1+0.01s)}$$

i cui diagrammi di Bode sono i seguenti:





e supponiamo che le specifiche siano $\omega_A^* = 10^{5/2}$ rad/s e $m_\psi^* = 60^\circ$. Si ha allora 10^2 rad/s $\approx \omega_A < \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A^*) < 20^\circ < m_\psi^*$. Poiché $C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{dB} \approx -20$ dB, è evidente che alzando il diagramma delle ampiezze di 20 dB e il diagramma delle fasi di almeno 45° è possibile ottenere il risultato desiderato.

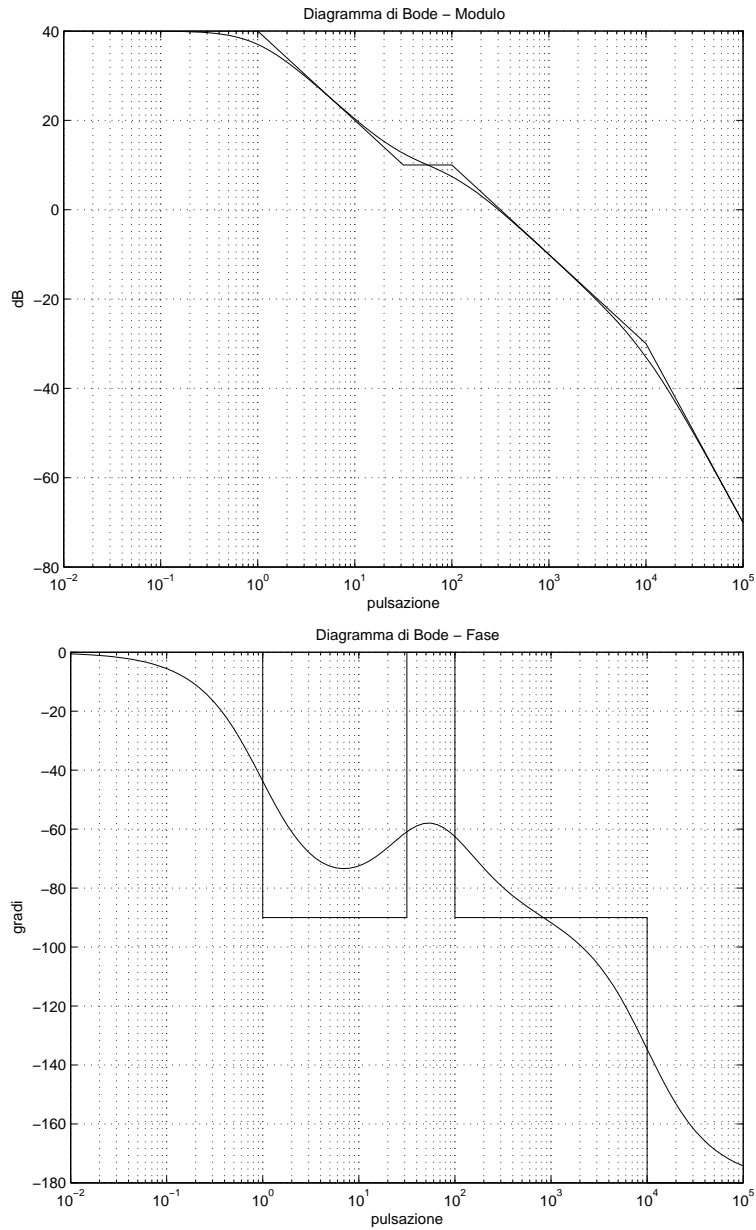
Se facciamo uso delle tabelle riportate in fondo, notiamo che una possibile scelta dei parametri del controllore è $\alpha = 0.035$ e $u = 10$. Questa soluzione assicura un incremento di ampiezza di 20 dB circa e un incremento di fase di 65° e corrisponde alla rete anticipatrice

$$C_{ant}(s) = \frac{1 + 0.0316 s}{1 + 0.011 s},$$

dove $T = u/\omega_A^* = 10/10^{5/2} = 10^{-3/2} = 0.0316$.

Una strada “a occhio” per realizzare questa coppia di obiettivi consiste nell’inserire, attraverso il controllore, uno zero in $-10^{3/2}$ e un polo molto dopo, ad esempio in -10^4 . In tal modo è immediato rendersi conto che la nuova pulsazione di attraversamento diventa ω_A^* e il margine di fase diventa addirittura prossimo a 90° , come dimostrano i diagrammi di Bode della nuova funzione di trasferimento in catena aperta:

$$C(s)G(s) = \frac{100(1 + 10^{-3/2}s)}{(1 + s)(1 + 0.01s)(1 + 0.0001s)}.$$



3.3 Caso (iii): $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_{\psi}(\omega_A^*) \geq m_{\psi}^*$

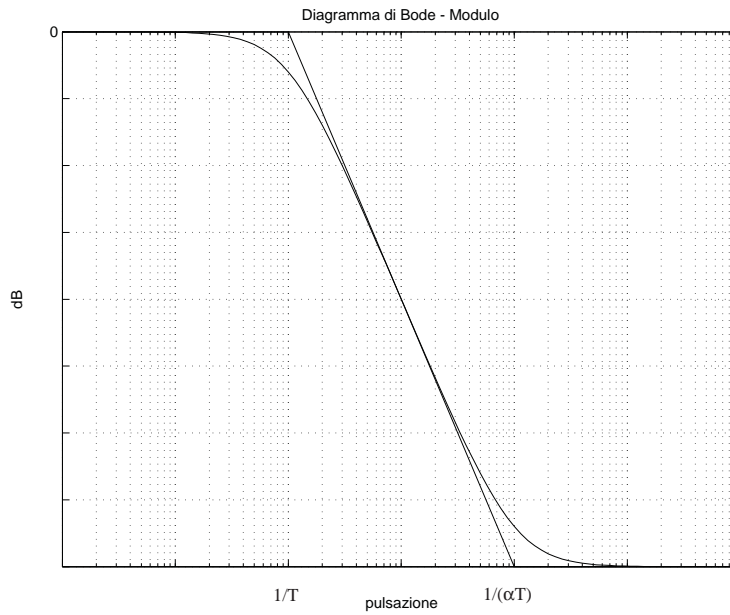
Una situazione di questo tipo corrisponde al caso in cui la pulsazione di attraversamento si trova alla destra della pulsazione di attraversamento desiderata e il margine di fase è superiore al margine di fase desiderato, e può essere risolta “abbassando” entrambi i diagrammi, sia quello delle ampiezze che quello delle fasi. Uno potrebbe essere tentato di adottare la strada del solo abbassamento del diagramma delle ampiezze, attraverso una riduzione del guadagno di Bode della $C'(s)G(s)$. Questa soluzione tuttavia non è

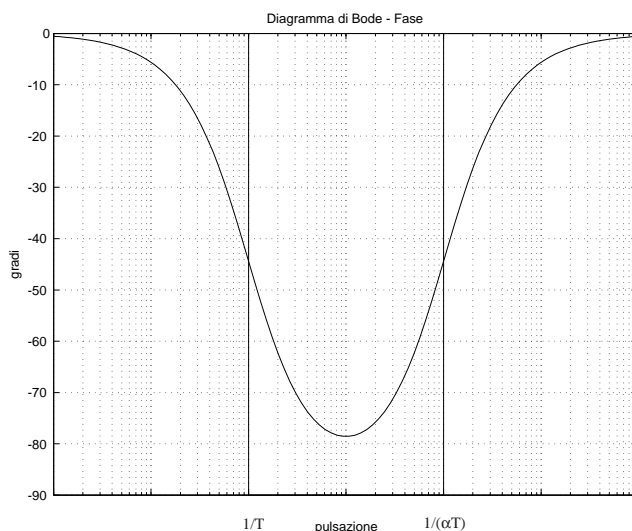
accettabile perchè altera il soddisfacimento delle specifiche sull'errore di regime permanente. L'idea è pertanto quella di agire in modo simmetrico a quanto fatto nel caso (ii), abbassando opportunamente l'ampiezza senza ridurre troppo la fase.

Tale operazione può essere intuitivamente realizzata inserendo opportunamente, attraverso il controllore, un polo reale negativo in posizione opportuna. Alternativamente possiamo ricorrere ad una **rete attenuatrice**. Un rete attenuatrice viene descritta da una funzione razionale propria con un polo reale negativo ed uno zero reale negativo collocato alla sua destra. In termini matematici

$$C_{att}(s) = \frac{1 + \alpha sT}{1 + sT}, \quad T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

I diagrammi di Bode corrispondenti a una rete attenuatrice sono i seguenti:





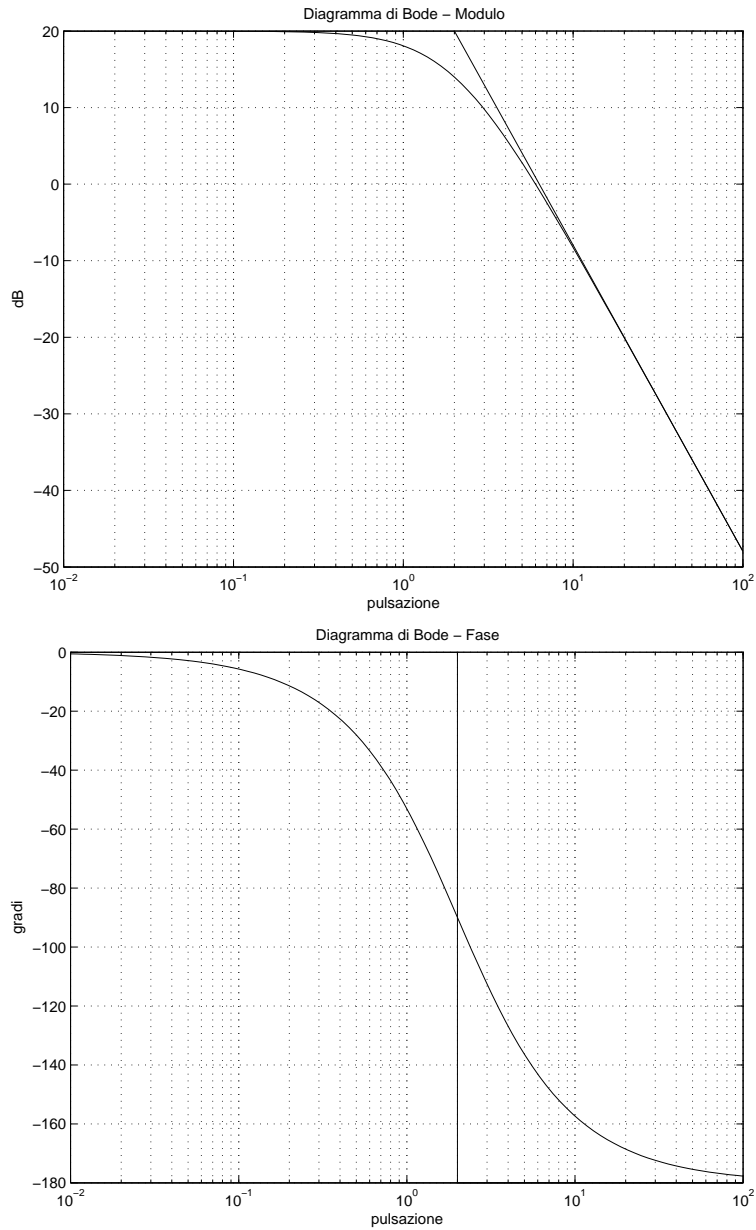
La scelta dei parametri T e α può essere effettuata “ad occhio”, con l’obiettivo di far coincidere la nuova pulsazione di attraversamento con la pulsazione desiderata ω_A^* e di decrementare la fase il minimo possibile, in modo da continuare a rispettare il margine di fase minimo richiesto.

Se ci limitiamo al caso in cui una singola rete attenuatrice è in grado di sistemare i problemi di pulsazione di attraversamento, senza rovinare il margine di fase, la scelta dei parametri può essere effettuata attraverso il ricorso alle tabelle riportate in fondo, rovesciate rispetto all’asse orizzontale o, equivalentemente, ipotizzando di avere in ordinate grandezze tutte con segno negativo. Le tabelle vanno impiegate nel seguente modo: una volta valutato il valore di $|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{dB}$, che è sicuramente positivo, dal momento che $\omega_A > \omega_A^*$, e il margine di fase alla pulsazione ω_A^* , $m_\psi(\omega_A^*)$, che è per ipotesi superiore al valore auspicato m_ψ^* , andiamo a ricercare nelle due tabelle due valori di u e α che corrispondano nella tabella delle ampiezze al valore $-|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|_{dB}$ e nella tabella delle fasi ad un valore non inferiore a $m_\psi^* - m_\psi(\omega_A^*) < 0$. Posto $T = \frac{u}{\omega_A^*}$, abbiamo ottenuto entrambi i parametri della rete attenuatrice che realizza le due operazioni di sollevamento cercate.

Esempio 3 Si consideri la funzione di trasferimento in catena aperta

$$C'(s)G(s) = 10 \frac{1}{(1 + 0.5s)^2},$$

a cui corrispondono i diagrammi di Bode



Vogliamo attribuire alla funzione di trasferimento in catena aperta pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1$ rad/sec e margine di fase pari almeno a 45° .

È immediato rendersi conto del fatto che la pulsazione ω_A si trova a metà tra $2 \cdot 10^0$ e $2 \cdot 10^1$, ovvero in corrispondenza a $2 \cdot 10^{1/2} \approx 6.32$ rad/sec, mentre il margine di fase in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 1$ rad/sec è superiore a 90° , giacchè in corrispondenza a $\omega = 2$ rad/sec la fase effettua la transizione da 0° a -180° assumendo il valore intermedio -90° . Per compensare il fatto che $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_\psi(\omega_A) > m_\psi^* := 45^\circ$ possiamo utilizzare un'azione attenuatrice. A tal fine valutiamo preliminarmente $|C'(j1)G(j1)|_{dB} \approx 17$ dB.

La consultazione delle tabelle delle reti attenuatrici alla ricerca di un'attenuazione di circa 17 dB assieme ad un decremento di fase inferiore a 45° porta alla scelta $\alpha = 0.13$ e $u = 20$. Per tali valori infatti si trova un'attenuazione di 17 dB e un decremento di fase inferiore a 20° . Da $T = \frac{u}{\omega_A^*} = 20$ segue

$$C_{att}(s) = \frac{1 + 2.6 s}{1 + 20 s}.$$

Adottando un approccio più intuitivo possiamo pervenire al risultato desiderato semplicemente “cancellando” uno dei due poli in -2 e rimpiazzandolo con un polo collocato in -0.1 . In questo modo, infatti, il diagramma asintotico dei moduli attraversa l'asse delle ascisse esattamente in corrispondenza alla pulsazione $\omega_A^* = 1$ rad/sec (e quindi la vera pulsazione di attraversamento è circa ω_A^*). Inoltre, per $\omega_A = 2$ rad/sec la fase subisce una transizione da -90° a -180° assumendo il valore intermedio -135° che corrisponde proprio ad un margine di fase di 45° . Ciò assicura che il margine di fase per $\omega_A^* = 1$ rad/sec sia maggiore di 45° .

Quanto descritto equivale ad introdurre un compensatore del seguente tipo:

$$C_{att}(s) = \frac{1 + 0.5s}{1 + 10s}.$$

3.4 Caso (iv): $\omega_A > \omega_A^*$ e $m_{\psi}(\omega_A^*) < m_{\psi}^*$

In questo caso sono necessarie due operazioni opposte sui due diagrammi di Bode: il diagramma delle ampiezze va infatti abbassato mentre il diagramma delle fasi va sollevato. Tali operazioni vengono effettuate attraverso l'impiego di una **rete a sella**, che altro non è che il prodotto di una rete attenuatrice e di una rete anticipatrice. Dal punto di vista pratico, la sintesi dell'azione di controllo verrà effettuata progettando prima una rete attenuatrice e poi una rete anticipatrice (o viceversa).

3.5 Stabilità del sistema retroazionato e criterio di Bode

La tecnica di sintesi per tentativi ora illustrata permette il soddisfacimento delle specifiche di regime transitorio e delle specifiche sul tipo e sul relativo errore di regime permanente. Nulla si è detto, tuttavia, sulla stabilità BIBO del risultante sistema retroazionato. In realtà, a tal fine, ci viene in aiuto un noto criterio di stabilità, noto come **criterio di Bode**. Tale criterio dice quanto segue:

Se la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il suo guadagno di Bode $K_B(G)K_B(C)$ è positivo, allora il risultante sistema retroazionato $W(s)$ è BIBO stabile se e solo se il margine di fase finale m_{ψ} di $C(s)G(s)$ è positivo.

Ciò dimostra che, nelle ipotesi summenzionate (ipotesi a cui peraltro ci siamo attenuti anche in fase di sintesi), il conseguimento di un margine di fase positivo e sufficientemente alto, al fine di soddisfare le specifiche di transitorio, assicura automaticamente anche il conseguimento della stabilità BIBO del sistema retroazionato.

4 Controllori PID

Con il simbolo PID si è soliti indicare controllori che realizzano sul segnale al loro ingresso (nel nostro schema il segnale di errore $e(t)$) la combinazione lineare di tre azioni: un'azione proporzionale (P), un'azione integrativa (I) e un'azione derivativa (D) e vengono pertanto descritti dalla seguente funzione di trasferimento:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad K_p, K_i, K_d \in \mathbb{R}.$$

Controllori di questo tipo possono essere riscritti in forma sintetica nel seguente modo

$$C(s) = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2}{s} = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s + \frac{K_d}{K_i} s^2}{s},$$

come pure nella forma

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{s T_i} + T_d s \right),$$

dove $T_i = K_p/K_i$ rappresenta la costante di tempo dell'azione integrale e $T_d = K_d/K_p$ la costante di tempo dell'azione derivativa. Essi, inoltre, corrispondono a funzioni di trasferimento in generale non proprie e possono essere sintetizzati con la medesima filosofia illustrata prima. Il polo nell'origine può infatti essere utilizzato per incrementare il tipo del sistema, il guadagno di Bode K_i serve per sistemare l'errore di regime permanente al segnale canonico che definisce il tipo e, infine, attraverso i parametri K_p e K_d possiamo introdurre due zeri (tipicamente, ma non necessariamente) reali negativi al fine di sistemare i problemi di pulsazione di attraversamento e margine di fase.

Esempio 5 Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

Si progetti un controllore PD (proporzionale derivativo) $C(s)$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato

- sia di tipo 1 con errore di regime permanente pari, all'incirca, a 0.01;
- abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec;
- abbia margine di fase pari almeno a 45° .

Un controllore di tipo PD ha la seguente struttura

$$C(s) = K_p + K_d s = K_p \left(1 + \frac{K_d}{K_p} s \right),$$

con K_p e K_d parametri reali. Affinché il tipo del sistema sia 1 è necessario che la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$, presenti un polo semplice nell'origine e tale

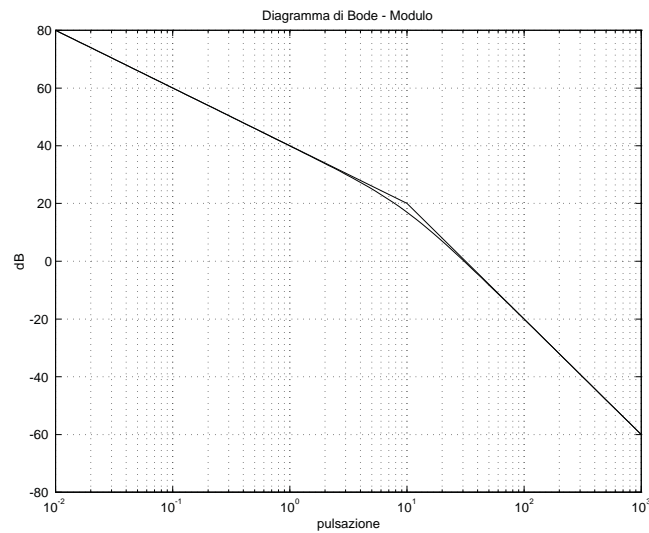
condizione è già verificata a priori. Per rendere soddisfatto il vincolo sull'errore di regime permanente dobbiamo agire sul guadagno di Bode del controllore (ovvero K_p), imponendo che

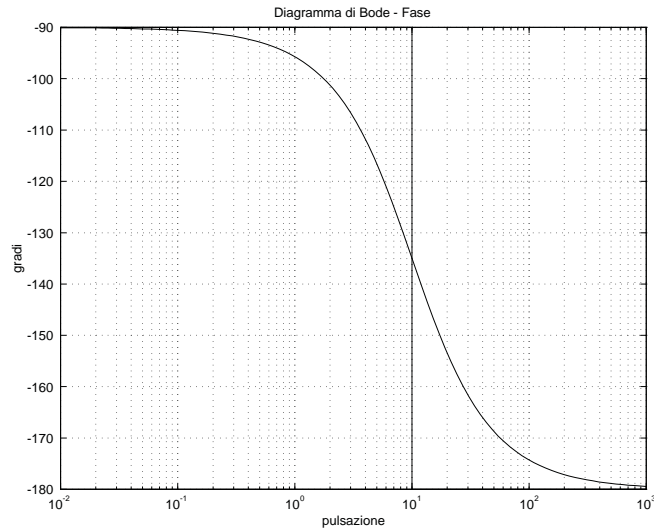
$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(G)K_B(C)} = \frac{1}{K_p} \approx 0.01.$$

Ciò impone $K_p \approx 100$. Assumiamo, quindi, $K_p = 100$. Andiamo ora a scegliere il valore di K_d in modo da soddisfare entrambi i vincoli b) e c). A tal fine è conveniente tracciare il diagramma di Bode di

$$K_p \cdot G(s) = \frac{1000}{s(s+10)}$$

e poi determinare il valore dello zero del controllore (reale e collocato in $-K_p/K_d$) in modo tale da ottenere pulsazione di attraversamento e margine di fase desiderati. Graficamente si trova





È immediato rendersi conto del fatto che, se introduciamo uno zero in -1 rad/sec (ovvero imponiamo $K_p/K_d = 1$) possiamo garantire sia la pulsazione desiderata $\omega_A^* = 1000$ rad/sec con un margine di fase superiore a 45° . Il controllore PD diventa, allora,

$$C(s) = 100(1 + 1s) = 100 + 100s.$$

4.1 Regole di taratura automatica dei controllori PID

Per concludere, va evidenziato come le tecniche di sintesi più utilizzate per i controllori PID siano di natura ben diversa e assolutamente meccanica. Queste tecniche, le più famose delle quali vengono attribuite a Ziegler e Nichols (**regole di taratura di Ziegler-Nichols in catena aperta** e **regole di taratura di Ziegler-Nichols in catena chiusa**), sono di largo impiego in ambito industriale, proprio per la loro estrema semplicità e per il fatto che consentono di ottenere prestazioni accettabili per il risultante sistema retroazionato anche a fronte di una conoscenza estremamente blanda dell'espressione analitica del processo $G(s)$. In generale, esse forniscono un soddisfacente insieme di valori iniziali dei parametri K_p , K_d e K_i , valori che andranno successivamente aggiustati al fine di conseguire le prestazioni desiderate.

In questa sede illustreremo brevemente solo le **regole di taratura di Ziegler-Nichols in catena chiusa**. Si assuma che il sistema sia chiuso in retroazione unitaria negativa e che l'azione di controllo $C(s)$ sia di tipo puramente proporzionale, ovvero $C(s) = K_p$. Il valore di K_p (che nei PID è regolabile in modo continuo) viene fatto variare da 0 fino ad un valore critico $K_{p_{cr}}$ in corrispondenza al quale il sistema risponde ad un segnale a gradino con un'uscita che presenta una componente oscillatoria non smorzata (un termine sinusoidale puro). In tale situazione si misura il periodo T_{cr} della componente oscillatoria.

Val la pena di evidenziare che, qualora il sistema in catena chiusa con solo controllo proporzionale non presenti oscillazioni sostenute per nessun valore di K_p , questa tecnica diventa assolutamente inutilizzabile.

A questo punto, a seconda del tipo di controllore PID che si voglia utilizzare (tipo che viene scelto in base alle considerazioni adottate nella sintesi per tentativi o in base a considerazioni di natura fisica), si attribuiscono ai parametri del controllore i valori riportati nella seguente tabella.

Tipo di controllore	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 K_{pcr}$	∞	0
PI	$0.45 K_{pcr}$	$0.85 T_{cr}$	0
PID	$0.6 K_{pcr}$	$0.5 T_{cr}$	$0.12 T_{cr}$