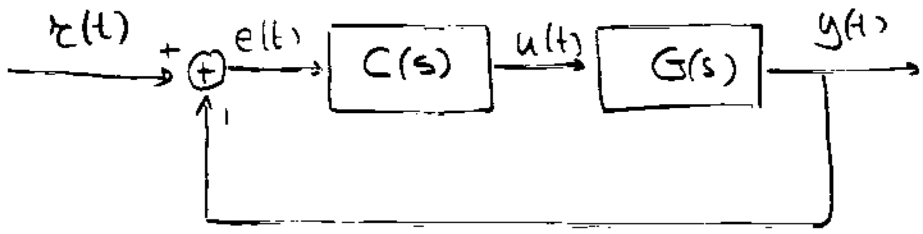
TIPO DI UN SISTEMA ED ERRORE DI REGIME PERMANENTE

Consideriamo il sistema retroazionato BIBO stabile



di funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{C(s)\,G(s)}{1 + C(s)\,G(s)}$

con $W(0) \neq 0$

il sistema viene detto DI TIPO k (k intero non negativo) se risponde, in condizioni di sola evoluzione forzata, al k-esimo segnale canonico in ingresso

$$r(t) = \frac{t^k}{k!}\,\delta_{-1}(t)$$

con un segnale di uscita $y_f(t)$ che per $t \gg 0$ differisce dal segnale $r(t)$ per un termine costante, ovvero

$$\text{per } t \gg 0 \qquad y_f(t) = y_{rp}(t) = \left(\frac{t^k}{k!} - c\right)\delta_{-1}(t)$$

il segnale di errore $e(t)$ vale quindi, per $t \gg 0$

$$e(t) \triangleq r(t) - y_f(t) \simeq \frac{t^k}{k!}\,\delta_{-1}(t) - \left(\frac{t^k}{k!} - c\right)\delta_{-1}(t)$$

$$= c\,\delta_{-1}(t)$$

Chiamiamo ERRORE DI REGIME PERMANENTE

$$e_{rp} \triangleq \lim_{t \to +\infty} e(t)$$

Pertanto un sistema è di tipo k se e solo se risponde al segnale canonico k-esimo con errore di regime permanente costante e non nullo.

Un sistema è di tipo (almeno) k se risponde al segnale canonico k-esimo con e_{rp} finito (eventualmente nullo). Ciò in virtù del fatto che un sistema di tipo k è certamente di tipo k-1 e così via.

Abbiamo visto che se sistema retroazionato di f.d.t. $W(s)$ è

- di tipo 1 (almeno) $\Longleftrightarrow$ $W(0) = 1$
- di tipo 2 (almeno) $\Longleftrightarrow$ $W(0) = 1$, $\left.\frac{dW}{ds}\right|_{s=0} = 0$
- di tipo 3 (almeno) $\Longleftrightarrow$ $W(0) = 1$, $\left.\frac{dW}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d^2W}{ds^2}\right|_{s=0} = 0$

$\vdots$

- di tipo k (almeno) $\Longleftrightarrow$ $W(0) = 1$, $\left.\frac{d^iW}{ds^i}\right|_{s=0} = 0 \quad i = 1, \dots k-1$

Vogliamo, per prima cosa, dimostrare che $W(s)$ e' di tipo K (almeno) se e solo se la fdt. in catena aperta $C(s)G(s)$ ha un polo di molteplicità (almeno) K nell'origine. ③

Sia $\frac{n(s)}{d(s)}$ una rappresentazione irriducibile di $C(s)G(s)$ da cui segue che $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{n(s)}{d(s)+n(s)}$

e $\frac{n(s)}{d(s)+n(s)}$ e' rappresentazione irriducibile di $W(s)$.

$W(s)$ e' di tipo 1 (almeno) $\iff \frac{n(0)}{d(0)+n(0)} = 1 \iff d(0) = 0$

$\iff C(s)G(s)$ ha 1 polo in 0

Se $W(s)$ e' ora di tipo 1 e quindi $d(0) = 0$ ci chiediamo quando e' pure di tipo 2 (almeno). Ciò accade se

$$\left.\frac{dW}{ds}\right|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{n(s)}{d(s)+n(s)}\right]_{s=0} = \left.\frac{\frac{dn}{ds}\cdot\left[d(s)+n(s)\right] - n(s)\left[\frac{dd(s)}{ds}+\frac{dn(s)}{ds}\right]}{\left(d(s)+n(s)\right)^2}\right|_{s=0}$$

sfruttando l'ipotesi $d(0) = 0$ $\longrightarrow$ $= -\frac{n(0)\cdot\left.\frac{d\,d(s)}{ds}\right|_{s=0}}{n(0)^2} = -\frac{1}{n(0)}\cdot\left.\frac{d\,d(s)}{ds}\right|_{s=0} = 0$

Pertanto

$W(s)$ e' di tipo (almeno) 2 $\iff \begin{cases} d(s)\big|_{s=0} = 0 \\ \left.\frac{d\,d(s)}{ds}\right|_{s=0} = 0 \end{cases}$

$\iff$ 0 e' zero doppio di $d(s)$

$\Longleftrightarrow$ $C(s)G(s)$ ha un polo doppio in 0

In modo analogo si dimostra che per $k>0$

$W(s)$ è di tipo (almeno) k $\Longleftrightarrow$ $C(s)G(s)$ ha un polo in 0 di molteplicità (almeno) k

$$\Longleftrightarrow \quad C(s)G(s) = \frac{1}{s^k}\frac{m(s)}{d_1(s)}$$

con $m(0)\neq 0$

In particolare

$W(s)$ è di tipo k esattamente $\Longleftrightarrow$ $C(s)G(s) = \dfrac{1}{s^k}\cdot\dfrac{m(s)}{d_1(s)}$

con $m(0)\neq 0$
$d_1(0)\neq 0$

Valutiamo, a questo punto, il valore dell'errore di regime permanente per un sistema retroazionato di f.d.t. $W(s)$ di tipo esattamente k.

Distinguiamo, a tal fine, il caso $k=0$ dai casi $k\geq 1$.

Caso $k=0$: sfruttando la teoria della risposta di regime permanente a segnali di tipo fasoriale e/o sinusoidale (in ipotesi di BIBO stabilità e di condizioni di pura evoluzione forzata), possiamo dire:

$$e_{rp}^{(0)} = \lim_{t\to+\infty} \delta_{-1}(t) - y_f(t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \delta_{-1}(t) - y_{rp}(t)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \delta_{-1}(t) - W(0)\,\delta_{-1}(t) = 1 - W(0)$$

$$= 1 - \frac{C(0)G(0)}{1+C(0)G(0)} = \frac{1}{1+C(0)G(0)}$$

Poiché il tipo del sistema è esattamente $K=0$ e quindi $C(s)G(s)$ non presenta né poli né zeri in 0 (se fosse $C(0)G(0)=0 \Rightarrow W(0)=0$ contro ipotesi iniziale), ne consegue che

$$C(0)\,G(0) = K_B(C)\cdot K_B(G)$$

dove $K_B(C)$ e $K_B(G)$ rappresentano le costanti di Bode di $C(s)$ e $G(s)$

Caso $K\geq 1$: determiniamo l'espressione di $e(t)$ (e quindi il suo valore limite) utilizzando le trasformate di Laplace dei segnali in gioco.

Siano

$$E(s) \triangleq \mathcal{L}[e(t)]$$

$$Y_f(s) \triangleq \mathcal{L}[y_f(t)] = W(s)\,R(s)$$

$$R(s) \triangleq \mathcal{L}[r(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\,\delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s^{k+1}}$$

Allora

$$E(s) = R(s) - Y_f(s) = [1 - W(s)]\frac{1}{s^{k-1}}$$

Sfruttiamo ora il fatto che il sistema è di tipo esattamente $k \geq 1$ e pertanto

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^k}\frac{n(s)}{d(s)} \qquad \begin{matrix} n(0) \neq 0 \\ d(0) \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad W(s) = \frac{n(s)}{\underbrace{s^k d(s) + n(s)}_{\substack{\text{Hurwitz} \\ \text{perché per ipotesi} \\ W(s) \text{ è BIBO}}}} \qquad 1 - W(s) = \frac{s^k d(s)}{\underbrace{s^k d(s) + n(s)}_{\text{HURWITZ}}}$$

Ma allora

$$E(s) = \frac{d(s)}{s\,[\underbrace{s^k d(s) + n(s)}_{\text{Hurwitz}}]} = \frac{1}{\frac{n(0)}{d(0)}}\frac{1}{s} + \underbrace{E_1(s)}_{\substack{\text{con poli} \\ \text{tutti in } Re(s)<0}}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$e(t) = \frac{1}{\frac{n(0)}{d(0)}}\delta_{-1}(t) + e_1(t) \qquad \text{con } e_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

Pertanto

$$e_{rp}^{(k)} = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \frac{1}{\frac{n(0)}{d(0)}} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)}$$

sfruttando il fatto che

$$C(s)G(s) = \frac{1}{s^k}\frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} n(0) \neq 0 \\ d(0) \neq 0 \end{matrix}$$