

Cognome: _____ Nome: _____ Voto _____ / 6

1

Compito di RICERCA OPERATIVA 1 del 31/1/2009

Tempo consentito: due ore. Non si possono usare testi né calcolatrici programmabili

[1] Un'azienda produce due tipi di prodotti finiti, di tipo A e B, ottenuti da materiale grezzo disponibile in pezzi indivisibili. Ogni pezzo di materiale grezzo viene acquistato a 250 Euro e può essere destinato interamente alla produzione di un massimo di 15 prodotti di tipo A, oppure interamente alla produzione di un massimo di 20 prodotti di tipo B (eventuali parti non utilizzate vengono perse). Ogni prodotto di tipo A o B richiede 1 ora di lavoro, che costa 25 Euro. I prodotti di tipo A vengono venduti a 50 Euro l'uno, quelli di tipo B a 45 Euro l'uno. L'azienda dispone di 50 ore lavorative complessive al giorno; ogni giorno il numero di prodotti di tipo A o B prodotti deve essere intero.

Si scriva nello spazio sottostante un **modello di Programmazione Lineare Intera** per determinare la produzione giornaliera a massimo profitto, introducendo due var. intere per il conteggio dei pezzi indivisibili di materiale grezzo utilizzati per la produzione dei prodotti di tipo A e B, rispettivamente.

Variabili e loro significato:

Funzione obiettivo:

Vincoli:

Cognome: _____ Nome: _____ Voto _____ / 12

2

[2.1] Si consideri il seguente problema di **Programmazione Lineare**:

$$z^* := \min 6x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4$$

soggetto a:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si risolva il problema mediante il **metodo del simplesso** delle **due fasi**, regola di Bland, usando 3 variabili artificiali. (Si utilizzi il retro del foglio per scrivere gli altri passaggi).

Ultimo Tableau

	x1	x2	x3	x4

Valore ottimo della funzione obiettivo: $z^* =$ _____

Valori delle variabili del problema all'ottimo: $x_1 =$ _____ $x_2 =$ _____ $x_3 =$ _____ $x_4 =$ _____

[2.2] Si scriva il **duale** del problema:

[2.3] Si consideri il seguente tableau ottimo:

		x1	x2	x3	x4
FO	8	0	0	5/32	7/32
I	27/8	0	1	3/16	-1/16
II	71/16	1	0	-1/32	5/32

Si **generino tutti i tagli di Gomory** per il problema in forma frazionaria (solo nella forma \geq ; non riportare altre forme o passaggi intermedi)

$$\text{_____ } x_1 + \text{_____ } x_2 + \text{_____ } x_3 + \text{_____ } x_4 \geq \text{_____}$$

$$\text{_____ } x_1 + \text{_____ } x_2 + \text{_____ } x_3 + \text{_____ } x_4 \geq \text{_____}$$

Cognome: _____ Nome: _____ Voto _____/7

3

[3.1] Il problema dell'albero di Steiner:

a) Definizioni e notazione

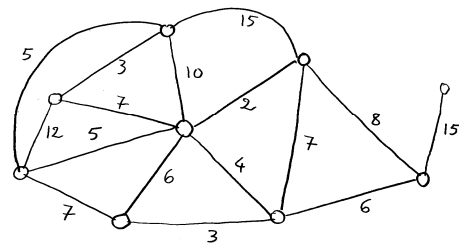
b) Complessità

c) Modello di PLI

d) Algoritmo di separazione per i vincoli di connessione (breve descrizione):

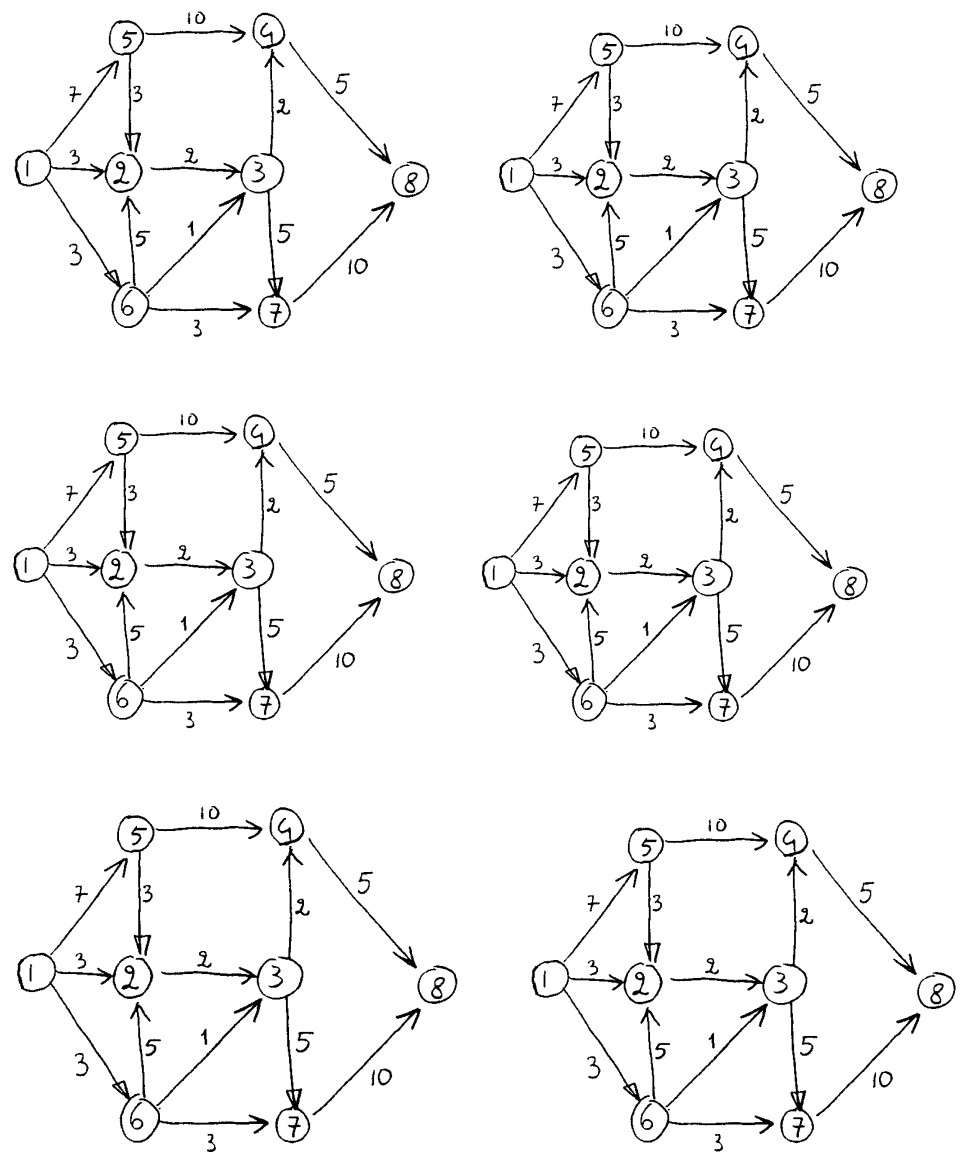
[3.2] Si scriva il modello dell'albero ricoprente di costo **massimo** su di un grafo $G=(V,E)$ connesso, non orientato e non completo, con costi $c(e)$ sui lati. Si calcoli inoltre l'albero ricoprente di costo **massimo** nel grafo in figura, utilizzando l'algoritmo di Kruskal. Riportare sul testo la soluzione trovata, annerendo i lati selezionati.

Modello di PLI:



Cognome: _____ Nome: _____ Voto _____ / 6

[4] (Flusso massimo) Individuare con l'algoritmo di Ford-Fulkerson il flusso massimo da 1 a 8 e la sezione di capacità minima della rete in figura. Si disegni un grafo per ogni iterazione del ciclo principale, evidenziando le etichette accanto ai nodi ed i flussi accanto agli archi. Si inizi con flusso nullo e si **annerisca, ad ogni iterazione, il cammino aumentate individuato**. Ad ogni iterazione del ciclo interno, si estendano le etichette a partire dal più piccolo nodo h etichettato e non elaborato (si scelga cioè $h := \min\{i: i \text{ appartiene a } Q\}$). All'ultima iterazione, evidenziare la sezione di capacità minima ed il flusso ottimo sugli archi.



SEZIONE CAPACITA' MINIMA = _____

Soluzioni 31/1/2009

Modello

Variabili e loro significato:

x_1 = numero prodotti di tipo A

x_2 = numero prodotti di tipo B

y_1 = numero pezzi grezzi destinati ai prodotti di tipo A

y_2 = numero pezzi grezzi destinati ai prodotti di tipo B

$$\max (50-25) x_1 + (45-25) x_2 - 250 y_1 - 250 y_2$$

Vincoli:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & & - 15y_1 & \leq 0 \\ & x_2 & & - 20y_2 \leq 0 \\ x_1 + & x_2 & & \leq 50 \\ x_1, & x_2, & y_1, & y_2 \geq 0 \text{ e intere} \end{array}$$

Duale del problema.

$$\begin{array}{l} \text{Max} \quad 3 u_1 + 6 u_2 + 12 u_3 \\ \text{s a} \quad u_1 + u_2 - u_3 \leq 6 \\ \quad - u_1 + u_3 \leq 7 \\ \quad u_1 + u_2 + 2 u_3 \leq 2 \\ \quad \quad 2u_2 + 4 u_3 \leq 3 \\ \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3 \text{ libere} \end{array}$$

Condizioni di ortogonalità (non richieste)

$$\begin{array}{l} (x_1 - x_2 + x_3 - 3) u_1 = 0 \\ (x_1 + x_3 + 2x_4 - 6) u_2 = 0 \\ (-x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 12) u_3 = 0 \\ (u_1 + u_2 - u_3 - 6) x_1 = 0 \\ (-u_1 + u_3 - 7) x_2 = 0 \\ (u_1 + u_2 + 2u_3 - 2) x_3 = 0 \\ (2u_2 + 4u_3 - 3) x_4 = 0 \end{array}$$

Sol primale, base $x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} - u_1 + u_3 & = & 7 \\ u_1 + u_2 + 2 u_3 & = & 2 \\ 2u_2 + 4 u_3 & = & 3 \end{array}$$

$$z = 21/2 \quad u_1 = 1/2 \quad u_2 = -27/2 \quad u_3 = 15/2$$

Gomory:

$$\begin{array}{l} 3/16 x_3 + 15/16 x_4 \geq 3/8 \\ 31/32 x_3 + 5/32 x_4 \geq 7/16 \end{array}$$

Simplesso due fasi

-z	-21	-1	0	-4	-6	0	0	0
x5	3	1*	-1	1	0	1	0	0
x6	6	1	0	1	2	0	1	0
x7	12	-1	1	2	4	0	0	1

-z	-18	0	-1	-3	-6	1	0	0
x1	3	1	-1	1	0	1	0	0
x6	3	0	1*	0	2	-1	1	0
x7	15	0	0	3	4	1	0	1

-z	-15	0	0	-3	-4	0	1	0
x1	6	1	0	1	2	0	1	0
x2	3	0	1	0	2	-1	1	0
x7	15	0	0	3*	4	1	0	1

-z	0	0	0	0	0	1	1	1
x1	1	1	0	0	2/3	-1/3	1	-1/3
x2	3	0	1	0	2	-1	1	0
x3	5	0	0	1	4/3	1/3	0	1/3

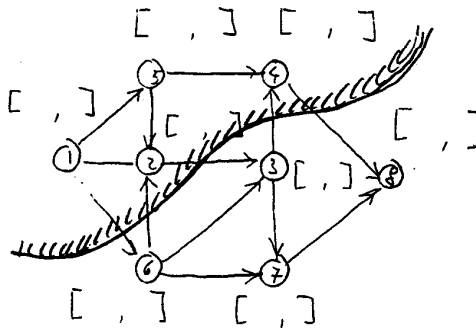
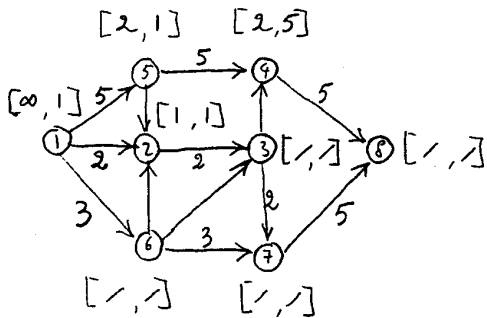
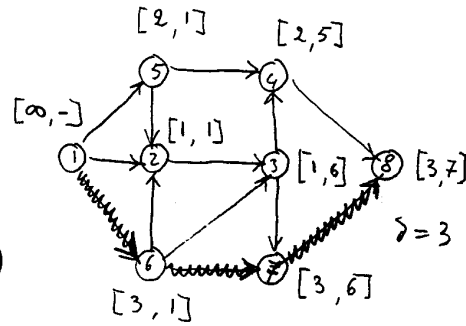
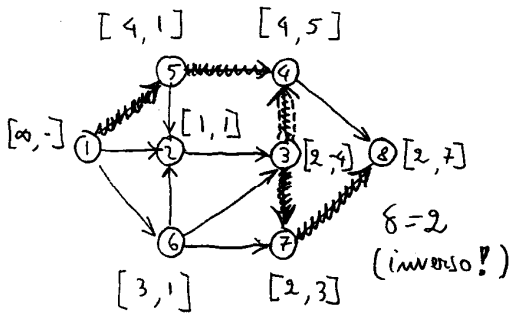
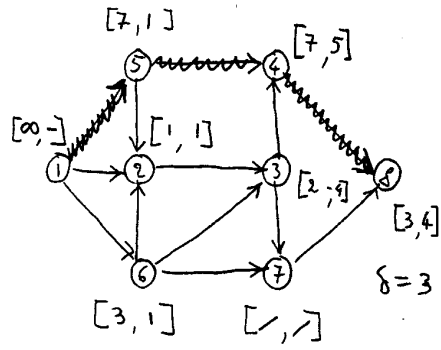
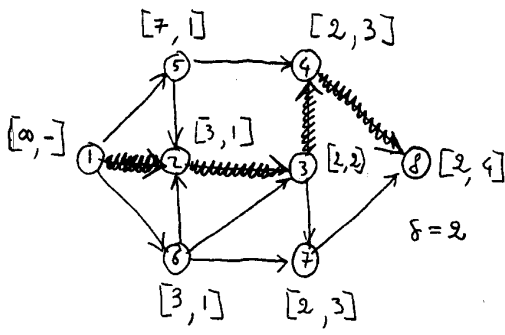
Fase 2

-z	-37	0	0	0	-53/3
x1	1	1	0	0	2/3*
x2	3	0	1	0	2
x3	5	0	0	1	4/3

-z	-21/2	53/2	0	0	0
x4	3/2	3/2	0	0	1
x2	0	-3	1	0	0
x3	3	-2	0	1	0

$$Z = 21/2 \quad x1 = 0 \quad x2 = 0 \quad x3 = 3 \quad x4 = 3/2$$

Flusso



Albero Massimo

Domanda di teoria:

