

Capitolo 7

Sintesi per modelli fisici

Federico Avanzini

Copyright ©1999 by Federico Avanzini. All rights reserved.

7.1 Introduzione

Nello sviluppo di modelli di sistemi acustici è utile individuare blocchi funzionalmente distinti, i quali possono venire studiati indipendentemente l'uno dall'altro e successivamente messi in interazione. Ad un primo livello di scomposizione si identificano due principali blocchi funzionali: l'*eccitatore* ed il *risonatore*. Il risonatore è la parte dello strumento in cui la vibrazione ha effettivamente luogo, ed è correlato a caratteristiche sonore quali altezza ed inviluppo spettrale. L'eccitatore provoca ed eventualmente sostiene la vibrazione nel risonatore, immettendo energia nello strumento; da esso dipendono le proprietà di attacco del suono, fondamentali nell'identificazione del timbro. Per fare qualche esempio, sono blocchi risonatori la corda nella chitarra, nel pianoforte, nel violino, o il tubo acustico nei legni e negli ottoni. Sono invece eccitatori il plettro nella chitarra, l'archetto nel violino, il martelletto nel pianoforte, l'ancia nel clarinetto.

Ciascuno dei due blocchi viene descritto da un sistema dinamico, tipicamente lineare per quanto riguarda il risonatore e non lineare per l'eccitatore. L'eccitatore può di solito essere rappresentato come costituito da corpi rigidi connessi tra loro attraverso degli ideali *elementi concentrati* (molle, elementi di attrito . . .), eventualmente non lineari. Il modello così ottenuto è allora descritto da sistemi di equazioni differenziali ordinarie (*ODE*, Ordinary Differential Equations); nel passaggio a tempo discreto, queste devono essere simulate utilizzando le tecniche messe a disposizione dall'analisi numerica. La sezione 7.2 è dedicata allo sviluppo di modelli a tempo continuo tramite elementi concentrati, mentre la successiva sezione 7.3 descrive alcune delle principali tecniche di discretizzazione di tali modelli.

Dalla parte opposta, il risonatore viene tipicamente trattato come un corpo flessibile, in cui forze e materia sono distribuiti in uno spazio continuo; si parla allora di *elementi distribuiti*, corde o membrane nel caso meccanico, colonne d'aria nel caso fluidodinamico. Il modello viene in questo caso descritto da equazioni alle derivate parziali (*PDE*, Partial Differential Equations), le cui incognite dipendono dalla posizione e dal tempo. La tecnica dominante nella descrizione a tempo discreto di elementi distribuiti è quella che fa uso di *modelli waveguide*: ad essi è dedicata la sezione 7.4.

Il capitolo è completato (sezione 7.5) da un esempio di modello fisico di un sistema acustico: il clarinetto. La quantità di letteratura esistente e di proprietà note, insieme alla relativa semplicità, sono tutte ragioni che fanno di questo modello un buon esempio introduttivo alla sintesi per modelli fisici.

7.2 Elementi concentrati: modelli a tempo continuo

In questa sezione ci occuperemo principalmente di modelli ad elementi concentrati; descriveremo dunque i sistemi acustici (meccanici e fluidodinamici) in esame tramite sistemi di equazioni differenziali ordinarie, o ODE. Nello sviluppo di modelli concentrati è utile innanzitutto stabilire delle analogie formali con i sistemi elettrici, che saranno nel seguito assunti come schema di riferimento.

7.2.1 Analogie

Come è ben noto dalla teoria dei sistemi, per una larga classe di sistemi fisici è possibile individuare coppie di variabili caratterizzate dal fatto che il loro prodotto rappresenta una potenza [$\text{Kg m}^2/\text{s}^3$]. Uno dei due fattori viene solitamente indicato con il nome di *trans-variabile*, a significare “variabile il cui valore si misura ai capi”, mentre il secondo viene chiamato *per-variabile*, ovvero “variabile il cui valore si misura su una sezione”. Nei sistemi elettrici è naturale identificare la trans-variabile con la tensione v e la per-variabile con l’intensità di corrente i (si osservi che il prodotto $i \cdot v$ dà effettivamente una potenza). Poiché la coppia v, i obbedisce alle leggi di Kirchhoff, nel seguito coppie di variabili che obbediscono a leggi analoghe verranno genericamente dette *di Kirchhoff*, anche nell’ambito di sistemi meccanici e fluidodinamici.

Nei sistemi elettrici le due variabili di Kirchhoff sono in generale legate da equazioni integro-differenziali. In particolare, tre fondamentali relazioni lineari permettono di introdurre i concetti di *resistenza*, *capacità* ed *induttanza*; l’uso della trasformata di Laplace consente di scrivere tali equazioni sotto forma di semplici relazioni algebriche:

$$V(s) = R \cdot I(s), \quad V(s) = \frac{1}{sC} I(s), \quad V(s) = sL \cdot I(s). \quad (7.1)$$

È quindi opportuno prendere in considerazione anche le grandezze integrali (nel tempo) delle variabili di Kirchhoff: queste vengono dette variabili *estensive*, mentre le prime sono indicate come *intensive*. La trans-variabile estensiva è quindi il flusso di induzione magnetica ϕ , mentre la per-variabile estensiva non è altro che la carica q . La figura 7.1 schematizza le relazioni che legano le quattro variabili in un sistema elettrico.

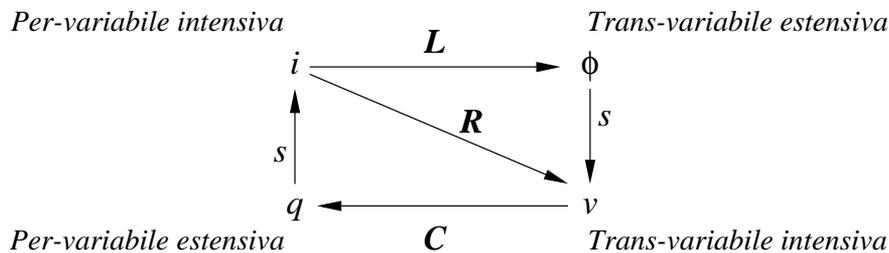


Figura 7.1: Relazioni tra per- e trans- variabili intensive ed estensive (sistema elettrico).

Nel caso dei sistemi meccanici l'analogia più comunemente adottata (sebbene non l'unica) è quella di *Maxwell*, che attribuisce alla *velocità* v [m/s] il significato di per-variabile intensiva¹ ed alla *forza* f [Kg m/s²] quello di trans-variabile intensiva (si noti che le dimensioni di $f \cdot v$ sono quelle di una potenza). Le variabili estensive sono dunque la posizione x [m] (integrale della velocità) e l'impulso della forza [Kg m/s] (integrale della forza).

Le leggi della meccanica forniscono tre relazioni fondamentali tra f e v e permettono di introdurre concetti analoghi a quelli di resistenza, induttanza e capacità.

La relazione più semplice, di proporzionalità diretta, è data dalla legge dell'*attrito lineare* $\mu \cdot v = f$. Se conveniamo di adottare l'analogia di Maxwell il *coefficiente d'attrito* μ gioca il ruolo della resistenza.

Una seconda relazione è fornita dalla *legge di Newton* $f = ma (= m\dot{v})$, che lega la forza all'accelerazione. Tramite la trasformata di Laplace la legge di Newton può essere riscritta come $m \cdot V(s) = \frac{1}{s} F(s)$. Come si vede questa rappresenta formalmente un'integratore, dove in particolare la *massa* m occupa il posto dell'induttanza.

Infine, l'analogo di fenomeni capacitivi è fornito dalla legge della *molla ideale* $f = k \cdot x (= k \int v dt)$, ovvero $V(s) = \frac{1}{k} \cdot F(s)$; questa volta l'equazione è quella di un derivatore, nel quale il coefficiente di elasticità k corrisponde all'inverso di una capacità.

Abbiamo dunque tre relazioni in perfetta analogia con le (7.1):

$$\begin{array}{ccc} F(s) = \mu \cdot V(s), & F(s) = \frac{k}{s} V(s), & F(s) = sm \cdot V(s) \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \mu \sim R, & \frac{1}{k} \sim C, & m \sim L. \end{array} \quad (7.2)$$

Passiamo ora ai sistemi fluidodinamici. Una scelta naturale per le variabili di Kirchhoff è quella di *pressione acustica* p [Kg/ms²] (trans-variabile intensiva) e *flusso* u [m³/s] (per-variabile intensiva). Per pressione acustica p si intende la variazione (tipicamente piccola) rispetto alla pressione atmosferica p_a , ovvero $p = dp_a$. La variabile u viene anche detta *velocità di volume*, e in un tubo cilindrico di sezione S essa è legata alla *velocità di particella* v dalla relazione $u = Sv$. Anche in questo caso il prodotto $u \cdot p$ ha le dimensioni di una potenza. Le variabili estensive sono date dal volume d'aria V (integrale del flusso)² e dall'integrale della pressione (grandezza senza nessun particolare significato fisico).

È possibile identificare fenomeni resistivi, capacitivi ed induttivi anche in campo fluidodinamico, sebbene l'analogia sia leggermente meno intuitiva rispetto ai sistemi meccanici. Esaminiamo brevemente ciascuno dei tre casi³.

Se consideriamo il passaggio di un flusso acustico attraverso un foro di piccole dimensioni, è lecito considerare che questo sia in fase con la pressione e che valga una relazione del tipo $p = R \cdot u$; R viene allora detta resistenza idraulica o fluidodinamica.

I fenomeni capacitivi sono invece associati alla contrazione ed espansione di volumi d'aria all'interno di cavità. Si consideri un volume V di aria, avente densità ρ e confinata in una cavità; agendo su di essa, la pressione acustica p produce una contrazione dV data da $-\rho c^2 \cdot dV/V = p$ (essendo ρ, c

¹ Si faccia attenzione all'ambiguità della notazione introdotta: la lettera v indica sia la tensione (trans-variabile) in un sistema elettrico sia la velocità (per-variabile) in un sistema meccanico.

² A questo punto la confusione notazionale è completa: il simbolo V indicherà a seconda dei casi il volume d'aria, la trasformata di Laplace della tensione o la trasformata di Laplace della velocità.

³ Per una trattazione approfondita si veda ad esempio Fletcher and Rossing (1991)

rispettivamente la densità dell'aria e la velocità del suono). Di conseguenza, nella cavità può entrare un nuovo volume $-dV$, dato per definizione dall'integrale del flusso entrante u . In definitiva:

$$-dV(t) = \int_0^t u(t') dt' = \frac{V}{\rho c^2} p(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{s} U(s) = \frac{V}{\rho c^2} P(s).$$

Riscrivendo opportunamente questa relazione e confrontandola con la seconda delle (7.1) si vede che la quantità $\rho c^2/sV$ rappresenta l'analogo fluidodinamico di una capacità.

Per quanto riguarda l'induttanza fluidodinamica, questa è definita all'interno di un tubo sufficientemente corto, di sezione S e lunghezza L . In dettaglio, se ρ è la densità dell'aria allora la massa contenuta nel tubo è $m = \rho SL$, e dalla legge di Newton $f = ma$ si deduce

$$Sp(t) = \rho SL \cdot \dot{v}(t) \quad \Leftrightarrow \quad P(s) = \frac{\rho L}{S} \cdot sU(s)$$

(ricordiamo che il flusso u e la velocità di particella v sono legate dalla relazione $u = Sv$). Si vede dunque che la relazione tra u e p è di tipo induttivo.

Possiamo a questo punto dare una definizione del concetto di *impedenza* per sistemi meccanici e fluidodinamici. In analogia con i sistemi elettrici, definiamo l'impedenza $Z(s)$ di un elemento concentrato come rapporto tra le trasformate di Laplace della trans-variabile e della per-variabile intensive. Alla luce di quanto detto finora siamo in grado di affermare che l'impedenza associata ad un generico sistema può essere vista come combinazione di componenti "elementari" Z_R, Z_C, Z_L , assimilabili a fenomeni di tipo resistivo, capacitivo ed induttivo. Useremo anche il concetto di *ammettenza*, definita semplicemente come l'inverso dell'impedenza, e la indicheremo con $\Gamma(s)$.

Le espressioni per le tre impedenze fondamentali Z_R, Z_C, Z_L sono riportate all'interno della tabella 7.1, che riassume tutte le analogie messe fino ad ora in luce tra sistemi elettrici, meccanici e fluidodinamici.

Sistema	Elettrico		Meccanico		Fluidodinamico	
Per-variabile int.	Corrente i		Velocità v		Flusso u	
Trans-variabile int.	Tensione v		Forza f		Pressione p	
Per-variabile est.	Carica q		Posizione x		Volume V	
Trans-variabile est.	Induzione ϕ		Impulso J		Senza nome, $\int p(t)dt$	
Z_R	(Resistenza) R	[$\frac{\text{Kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$]	(Attrito) μ	[$\frac{\text{Kg}}{\text{s}}$]	(Foro) R	[$\frac{\text{Kg}}{\text{m}^4\cdot\text{s}}$]
Z_C	(Capacità) $\frac{1}{sC}$		(Molla) $\frac{k}{s}$		(Cavità) $\frac{\rho c^2}{sV}$	
Z_L	(Induttanza) $\frac{s}{L}$		(Massa) $m \cdot s$		(Tubo) $\frac{\rho L s}{S}$	

Tabella 7.1: Schema riassuntivo delle analogie tra sistemi elettrici, meccanici e fluidodinamici

7.2.2 Giunzioni

Ci occupiamo ora dello studio delle connessioni tra gli elementi introdotti nella sezione precedente. Alla luce delle analogie messe in luce, da qui in avanti conveniamo per semplicità di indicare con i termini di tensione e corrente le generiche variabili di Kirchoff, denotate rispettivamente con v e i .

Come per i circuiti elettrici valgono le *Leggi di Kirchhoff*, che in questo contesto possiamo esprimere così:

- In un circuito la somma delle per-variabili intensive che attraversano i rami entranti in un nodo è nulla (legge di Kirchhoff ai nodi).
- In un circuito la somma delle trans-variabili intensive ai capi dei rami costituenti una maglia è nulla (legge di Kirchhoff alle maglie).

Le leggi di Kirchhoff ci permettono di fornire una definizione per connessioni in *serie* e *parallelo* per N elementi di impedenza. Prendendo ancora una volta i sistemi elettrici come modello di riferimento, affermiamo che una giunzione è in serie se la corrente che attraversa gli N rami è la stessa per tutti mentre la somma delle tensioni di maglia è nulla. In formule:

$$\sum_{l=1}^N v_l = 0, \quad i_l = i_j \quad \forall l = 1 \dots N \quad (7.3)$$

Un esempio di connessione in serie è dato da due o più corde collegate tra loro in un punto (idealmente privo di massa). Alla giunzione le velocità delle due corde sono ovviamente le stesse, mentre le forze si devono sommare a zero per non imprimere un'accelerazione infinita ad un punto di massa nulla.

In maniera duale, affermiamo che una giunzione è in parallelo se la tensione che insiste sugli N rami è la stessa per tutti mentre la somma delle correnti al nodo è nulla. In formule:

$$\sum_{l=1}^N i_l = 0, \quad v_l = v_j \quad \forall l = 1 \dots N \quad (7.4)$$

Due o più tubi acustici collegati tra loro ad una estremità costituiscono una connessione in parallelo. Infatti il principio di conservazione della massa impone che i flussi netti nella giunzione si sommino a zero, mentre per continuità la pressioni dai vari rami assumono lo stesso valore.

Studiamo ora un esempio concreto: prendiamo in esame un semplice sistema acustico, noto come *risonatore di Helmholtz*. Le variabili di Kirchhoff sono in questo caso la pressione p e il flusso u . La figura 7.2 fornisce una schematizzazione del sistema in esame, costituito da un "collo" di lunghezza L e sezione S e da una cavità di volume V .

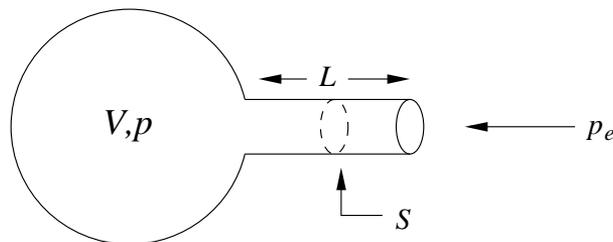


Figura 7.2: Un risonatore di Helmholtz.

Mostreremo nelle prossime righe che un risonatore di Helmholtz può essere modellizzato tramite connessioni di opportuni elementi concentrati; in particolare, vedremo che esso è equivalente ad una connessione in *serie* delle tre impedenze Z_R, Z_L, Z_C .

Consideriamo il caso in cui venga applicata una pressione esterna p_e come in figura: vogliamo descrivere il flusso u . Schematizzando, possiamo immaginare il risonatore composto da tre elementi

distinti: la terminazione aperta, il collo e la cavità. Il flusso u è condiviso da tutti e tre questi elementi, dunque la connessione è in serie.

Come discusso a pagina 7.4, il collo è descritto da un termine di impedenza puramente induttiva $Z_L = \frac{\rho L s}{S}$ (ρ è la densità dell'aria).

Le dissipazioni (anche quelle viscoso sulle pareti) vengono modellate da un semplice termine di resistenza $Z_R = R$. Per finire, il flusso u entra nella cavità, così che bisogna considerare anche un termine di capacità $Z_C = \frac{\rho c^2}{V s}$ (dove c indica come di consueto la velocità del suono nell'aria).

In conclusione, nel dominio delle frequenze il flusso è descritto dall'equazione

$$RU(s) + \frac{\rho L}{S} \cdot sU(s) - \frac{\rho c^2}{V} \cdot \frac{1}{s}U(s) = P_e(s). \quad (7.5)$$

Notiamo che la (7.5) è formalmente identica all'equazione che descrive un circuito RLC , nel quale la pressione esterna p_e svolge il ruolo di un generatore: è ben noto che questa è l'equazione di un *oscillatore*. La figura 7.3 mostra il circuito descritto dalla (7.5).

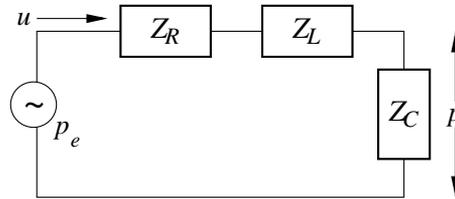


Figura 7.3: Circuito equivalente ad un risonatore di Helmholtz.

7.2.3 Elementi non lineari

Gli elementi e gli esempi visti fino ad ora rimangono nell'ambito delle equazioni differenziali *lineari*. È proprio questa circostanza a rendere possibile la definizione di impedenza: il passaggio alla trasformata di Laplace consente di convertire delle relazioni integro-differenziali (lineari) in semplici relazioni algebriche. Quando invece si voglia prendere in esame elementi non lineari, la trasformazione di Laplace perde ogni utilità e non consente più di trovare soluzioni delle equazioni in esame.

Un semplice sistema elettrico, utile ad esemplificare il ruolo delle non linearità, è costituito dal classico circuito di *Chua-Felderhoff*. Questo non è altro che un circuito RLC , nel quale le componenti R ed L sono lineari; la componente C è una capacità non lineare, la cui caratteristica tensione-carica è

$$q(v) = C_0 \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v}{v_0}}} \sim C_0 v \quad \text{per } v \rightarrow 0, \quad (7.6)$$

definita per $v > -v_0$. Dunque l'elemento capacitivo ha un andamento approssimativamente lineare solo per tensioni molto piccole, e se ne discosta al crescere di v . La figura 7.4 mostra l'andamento di $q(v)$ per valori $C_0 = 80\text{pF}$ e $v_0 = 0.6\text{V}$.

Il circuito di Chua-Felderhoff esibisce un comportamento caotico; in particolare, al variare della tensione di picco del generatore l'andamento della carica $q(t)$ è soggetto a biforcazioni successive, che portano a ripetuti raddoppi di periodo e quindi a dinamiche caotiche.

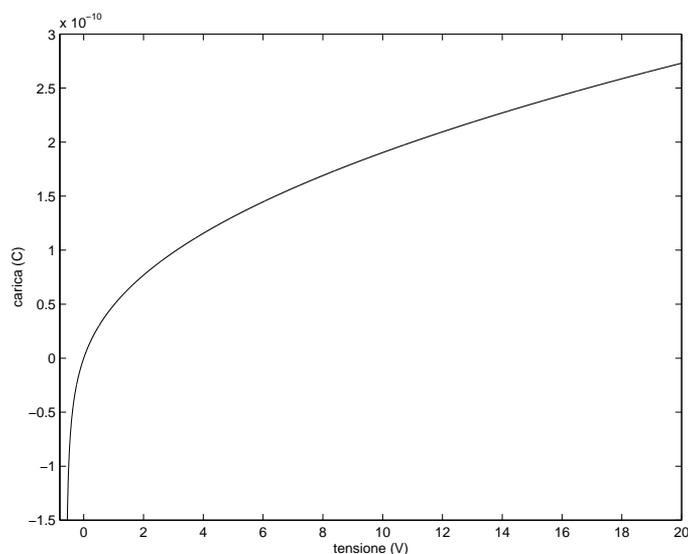


Figura 7.4: Caratteristica non lineare per il condensatore (7.6) ($C_0 = 80\text{pF}$, $v_0 = 0.6\text{V}$).

Nei modelli fisici di strumenti musicali le non linearità giocano un ruolo essenziale soprattutto nella descrizione dei meccanismi di eccitazione: l'interazione tra l'elemento eccitatore (l'ancia di clarinetto, il martelletto di pianoforte, e così via) e la parte risonante del sistema (tipicamente la corda o il tubo acustico) è il più delle volte descritta da relazioni non lineari. Se da una parte queste complicano fortemente i modelli (anche e soprattutto dal punto di vista della trattazione numerica), dall'altra conferiscono ai modelli stessi dinamiche "interessanti". In assenza di elementi non lineari qualsiasi sistema di equazioni costituisce nulla più di un filtro, sia pure di dimensioni elevate.

Due esempi di modelli non lineari molto usati sono rappresentati dall'ancia di clarinetto e dal *martelletto non lineare* di pianoforte. Le equazioni del clarinetto vengono trattate nella sezione 7.5; in queste pagine esaminiamo invece il martelletto non lineare, rappresentato schematicamente in figura 7.5. In questo modello il martelletto è rappresentato da una massa m collegata ad una molla e ad un

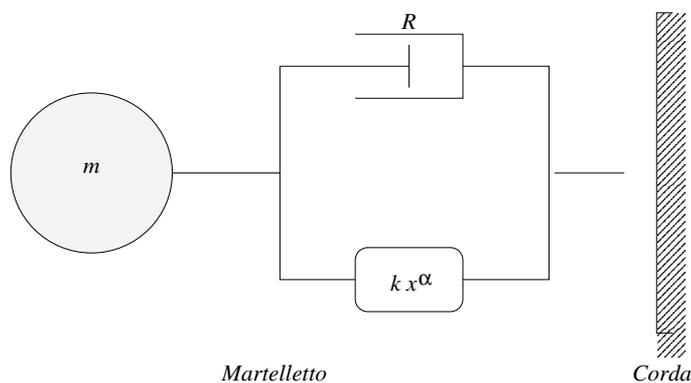


Figura 7.5: Schema meccanico del martelletto non lineare con feltro dissipativo.

attrito, che rendono conto rispettivamente dell'elasticità e delle dissipazioni del feltro nell'urto con la

corda. I tre elementi sono ovviamente in serie, in quanto condividono la velocità del martelletto.

L'elasticità è non lineare, ed è rappresentata dalla relazione

$$f = f(x) = k \cdot x^\alpha,$$

dove α è un coefficiente reale che “modula” la non linearità ($\alpha = 1$ corrisponde al caso lineare della molla ideale) e x è la posizione del martelletto relativa a quella della corda.

Osserviamo che il martelletto non lineare è un perfetto equivalente meccanico del circuito di Chua-Felderhoff: è infatti costituito da una connessione in serie di un elemento resistivo lineare (attrito), un elemento induttivo lineare (massa) e un elemento capacitivo non lineare (molla); l'unica differenza tra i due sistemi è data dalla forma della non linearità⁴.

7.3 Elementi concentrati: metodi numerici

Fino ad ora ci siamo occupati della costruzione di modelli a tempo continuo dei sistemi fisici a cui siamo interessati: la realtà fisica viene schematizzata tramite la connessione di elementi meccanici fondamentali, a loro volta descritti da equazioni differenziali. Per effettuare delle simulazioni numeriche è necessario operare il passaggio da tempo continuo a tempo discreto, ovvero da equazioni differenziali ad *equazioni alle differenze*.

7.3.1 Campionamento e aliasing

Nell'ambito della teoria dei segnali, una tecnica elementare di discretizzazione è quella della *invarianza della risposta all'impulso*. Se il sistema differenziale considerato è lineare esso è completamente descritto dalla sua risposta all'impulso $h_c(t)$, o equivalentemente dalla funzione di trasferimento $H_c(s)$ (trasformata di Laplace di h_c). Il metodo consiste allora nell'effettuare un campionamento uniforme di h_c , scalato per l'ampiezza dell'intervallo di campionamento T . Si costruisce quindi la risposta all'impulso a tempo discreto h_d , data da

$$h_d(n) = T \cdot h_c(nT). \quad (7.7)$$

Il vantaggio di una tale tecnica risiede ovviamente nel fatto che essa preserva la forma della risposta all'impulso. Inoltre si può vedere che, indicati con p_c i poli di H_c , i poli corrispondenti di H_d sono dati semplicemente da $p_d = e^{p_c T}$. In particolare, se $\text{Re}(p_c) < 0$ si ha $|p_d| < 1$; quindi anche la stabilità viene conservata.

Il teorema del campionamento dimostra che la risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$ del sistema (7.7) è la ripetizione periodica di quella del sistema a tempo continuo, con periodo di ripetizione pari a $F_s = T^{-1}$. Si ha cioè

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c\left(\frac{j\omega}{T} + j\frac{2k\pi}{T}\right). \quad (7.8)$$

Una conseguenza è che se la banda di H_c è più larga di F_s , le ripetizioni periodiche introducono delle componenti spurie nella banda di interesse per il sistema discreto; si ha cioè *aliasing*.

⁴Perlomeno l'unica differenza strutturale. In realtà i due sistemi funzionano in maniera diversa, dal momento che il circuito di Chua-Felderhoff è forzato da un generatore di corrente alternata, mentre nel caso del martelletto la forzante risulta dall'interazione (limitata agli istanti iniziali del moto) con la corda.

Il fenomeno è trascurabile se H_c è sufficientemente prossima allo zero alle alte frequenze, ad esempio quando rappresenta la risposta in frequenza di un filtro passa-basso o passa-banda. Nel caso di trasformazioni passa-alto, invece, l'aliasing distorce in maniera sensibile la risposta in frequenza a tempo discreto e il metodo non può essere utilizzato.

7.3.2 Mappe lineari

Un approccio alternativo a quello appena visto consiste nel rimpiazzare le derivate dell'equazione differenziale in esame con combinazioni lineari dei valori assunti dalla variabile nei punti $t = nT$, con $n = 0 \dots N$. Nel dominio delle frequenze ciò corrisponde a sostituire s con un'opportuna funzione di $g(z)$ (ricordiamo che le proprietà della trasformazione di Laplace e della trasformazione Z permettono di identificare s come operatore di derivazione e z^{-1} come ritardo unitario). La funzione g definisce quindi un *mapping* $s \mapsto z$ del piano complesso in sé e la funzione di trasferimento $H_d(z)$ a tempo discreto è ottenuta da quella a tempo continuo $H_c(s)$ per composizione:

$$H_d(z) := H_c(g(z)).$$

Un primo elementare tentativo è quello di sostituire alla derivata un rapporto incrementale:

$$\frac{d}{dt}x(nT) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{x(nT) - x(nT - h)}{h} \approx \frac{x((n)T) - x((n-1)T)}{T} \quad (7.9)$$

Questa rappresenta la più semplice approssimazione per la derivata prima, e prende il nome di schema di *Eulero all'indietro*. Per approssimare la derivata seconda si può in maniera ovvia applicare la (7.9) alla derivata prima:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x(t) &\approx \frac{1}{T} \left[\frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} - \frac{x((n-1)T) - x((n-2)T)}{T} \right] = \\ &= \frac{x(nT) - 2x((n-1)T) + x((n-2)T)}{T^2}. \end{aligned}$$

Tuttavia una scelta migliore consiste nel centrare la stima intorno all'istante n piuttosto che $n-1$. Dunque si usa di solito l'approssimazione seguente:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \approx \frac{x((n+1)T) - 2x(nT) + x((n-1)T)}{T^2}. \quad (7.10)$$

L'approssimazione (7.9) definisce, nel dominio delle frequenze, il mapping

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (7.11)$$

Data allora una funzione di trasferimento a tempo continuo H_c , a questa viene associata una corrispondente H_d data da

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)$$

Vediamo ora un secondo criterio di approssimazione per le derivate. Partendo dall'identità

$$x(nT) = x((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} \dot{x}(\tau) d\tau$$

si può approssimare l'integrale con il metodo dei trapezi, ottenendo

$$\begin{aligned} x(nT) &\approx x((n-1)T) + T \frac{\dot{x}(nT) + \dot{x}((n-1)T)}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{x(nT) - x((n-1)T)}{T} \approx \frac{\dot{x}(nT) + \dot{x}((n-1)T)}{2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Intuitivamente il metodo dei trapezi fornisce un'approssimazione migliore rispetto allo schema di Eulero; infatti lo stesso rapporto incrementale non approssima più la derivata in nT , ma il valor medio di questa tra nT ed $(n-1)T$. Applicando la trasformata Z alla (7.12) si trova

$$\dot{X}(z) \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} X(z) \quad \Rightarrow \quad s \approx \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (7.13)$$

Anche in questo caso abbiamo ottenuto un mapping $s \mapsto z$ del piano complesso in sé, che prende il nome di *trasformazione bilineare*. La funzione di trasferimento a tempo discreto H_d è allora ottenuta da quella a tempo continuo H_c mediante la relazione

$$H_d(z) = H_c \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right).$$

Per individuare pregi e difetti del metodo di Eulero e della trasformazione bilineare, studiamo le proprietà dei rispettivi mapping da s a z .

Sia la (7.11) sia la (7.13) definiscono trasformazioni uno-a-uno del piano complesso in sé, e quindi non introducono aliasing. Questo è un fondamentale vantaggio rispetto alle tecniche di campionamento della risposta all'impulso.

Inoltre, si può vedere che le due trasformazioni mappano l'asse delle frequenze analogiche $s = j\omega_c$ rispettivamente nel cerchio di raggio $1/2$ centrato in $z = 1/2$ e nel cerchio di raggio unitario centrato nell'origine. Il semipiano $\text{Re}(s) < 0$ viene mappato all'interno delle due circonferenze. Da questo possiamo trarre alcune conclusioni: innanzitutto, entrambe le trasformazioni preservano la stabilità, perché poli con parte reale negativa vengono portati in poli di modulo minore di 1. In realtà Eulero fa anche di più, perché può mappare poli con parte reale nulla o addirittura positiva all'interno del cerchio unitario. Questa proprietà stabilizzante prende a volte il nome di *smorzamento artificiale*.

Osserviamo che la trasformazione bilineare mappa esattamente l'asse delle frequenze analogiche nella circonferenza delle frequenze discrete $z = e^{j\omega_d}$. Questa è una proprietà estremamente positiva, perché in questo modo la forma della risposta in frequenza del sistema viene conservata nel passaggio al tempo discreto. La stessa cosa non succede invece per il metodo di Eulero: infatti $s = 0$ corrisponde a $z = 1$, come desiderato, ma le frequenze più alte vengono mappate dentro il cerchio unitario piuttosto che su di esso.

Un'ultima osservazione su queste due trasformazioni riguarda il *warping*, cioè la compressione introdotta sulle frequenze. Questo è un fenomeno che nella progettazione di sistemi acustici va valutato con attenzione: in alcuni casi, ad esempio, il sistema in esame può avere una o più frequenze di risonanza; se queste vengono spostate dal warping in seguito alla discretizzazione del sistema il modello può diventare del tutto fallimentare.

Per la trasformazione bilineare è facile vedere che se $z = e^{j\omega_d}$, la (7.13) si riduce a

$$j\omega_c = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{j\omega_d}}{1 + e^{j\omega_d}} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{2}{T} \tan \left(\frac{\omega_d}{2} \right). \quad (7.14)$$

Questa mostra che sulle basse frequenze la relazione tra ω_c e ω_d è approssimativamente lineare, mentre sulle alte frequenze si ha warping ed in particolare $\omega_d \rightarrow \pi$ quando $\omega_c \rightarrow \pm\infty$.

Anche per il metodo di Eulero si verifica un analogo fenomeno di distorsione, con la differenza che in questo caso non è possibile ricavare una corrispondenza diretta tra ω_c e ω_d analoga alla (7.14).

7.3.3 Integrazione numerica di ODE

Nell'ambito del calcolo numerico, i metodi conosciuti ed utilizzati per l'integrazione numerica di sistemi di equazioni differenziali ordinarie sono numerosi.

In generale, un sistema di ODE può sempre essere scritto come un'equazione vettoriale del primo ordine:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t) \quad (7.15)$$

Se \underline{f} è lineare, $\underline{f}(\underline{x}(t), t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)$, allora la soluzione esatta può sempre essere trovata ricorrendo ad esempio alle trasformate di Laplace. Se invece \underline{f} è non lineare, in generale non è possibile trovare soluzioni esatte per la (7.15).

La maggior parte dei metodi del calcolo numerico lavora su problemi ai *valori iniziali*:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (7.16)$$

Al problema (7.16) viene associata un'equazione alle differenze che in generale ha la forma

$$\sum_{l=0}^k \alpha_l \underline{x}_{n+l} = T \underline{\phi}_f(\underline{x}_{n+k}, \underline{x}_{n+k-1}, \dots, \underline{x}_n, t_n, T), \quad (7.17)$$

dove T è l'intervallo di campionamento e k è il numero di passi del metodo. La forma della funzione $\underline{\phi}_f$ cambia a seconda del metodo scelto: metodi lineari multistep, predictor-corrector, Runge-Kutta, e così via. Lo schema di Eulero all'indietro e la trasformazione bilineare, esaminati nelle pagine precedenti, sono casi particolari di queste più generali classi di metodi.

Non ci interessa qui esaminare in dettaglio le diverse tecniche⁵; è però opportuno fornire alcuni criteri di valutazione che hanno validità generale.

Un primo punto riguarda l'*accuratezza* di un metodo, ovvero la sua capacità di produrre soluzioni numeriche abbastanza vicine a quelle esatte. La proprietà minima richiesta per qualsiasi metodo è che questo sia convergente, cioè che si abbia $x_n \rightarrow x(t_n)$ al tendere di T a zero ($x(t_n)$ e x_n indicano rispettivamente la soluzione esatta e quella numerica al tempo t_n). Per molte tecniche (ad esempio metodi lineari multistep o metodi di Runge Kutta) una misura di accuratezza è fornita dall'*errore di troncamento globale*:

$$E_n = x(t_n) - x_n.$$

L'andamento di questo errore per piccoli T determina l'*ordine* del metodo; più precisamente, se $E_n \sim O(T^p)$ per $T \rightarrow 0$, allora il metodo è di ordine p .

Un secondo criterio di valutazione riguarda l'aspetto computazionale; poiché siamo interessati alla sintesi in tempo reale, è necessario che i metodi utilizzati producano algoritmi compatti e poco dispendiosi. Purtroppo questa richiesta è in contrasto con quella, altrettanto legittima, di accuratezza.

⁵Per una trattazione completa e rigorosa si rimanda ad esempio a Lambert (1993).

Ad esempio, un metodo multistep è tanto più accurato quanto maggiore è il suo numero di passi k , ma diventa allo stesso tempo sempre più dispendioso dal punto di vista computazionale.

Anche alla luce di quest'ultima osservazione si capisce come sia difficile trovare criteri generali per valutare il grado di ottimalità di uno schema numerico. Nella maggior parte dei casi concreti, quindi, l'unico approccio realmente valido è quello sperimentale, che consiste nel provare varie tecniche e confrontare i diversi risultati prodotti.

7.4 Elementi distribuiti: l'approccio waveguide

In questa sezione spostiamo la nostra attenzione sui modelli ad elementi distribuiti, descritti a tempo continuo da equazioni alle derivate parziali, o PDE. Tra le tecniche di simulazione a tempo discreto, una delle più utilizzate in questo ambito è quella dei modelli a guide d'onda (waveguide), che uniscono efficienza ed accuratezza. I modelli waveguide verranno innanzitutto introdotti nell'ambito di mezzi ideali (corde perfettamente flessibili e tubi cilindrici senza perdite). In seguito si vedrà come incorporare nei modelli fenomeni tipici di sistemi reali, quali dissipazione e dispersione. Una sezione conclusiva è dedicata alla descrizione di modelli waveguide per tubi conici.

I fenomeni vibratorii che hanno luogo all'interno di mezzi elastici ideali obbediscono alla stessa equazione alle derivate parziali: l'equazione delle onde (o equazione di D'Alembert).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(\underline{x}, t) = c^2 \cdot \nabla^2 y(\underline{x}, t), \quad (7.18)$$

dove il simbolo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ indica l'operatore laplaciano nelle variabili spaziali. In queste pagine siamo interessati alla versione monodimensionale della (7.18), in cui y dipende da una variabile spaziale scalare x : è questo il caso della propagazione di onde trasversali in una corda o di onde piane longitudinali nell'aria. L'equazione delle onde diventa allora:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \quad (7.19)$$

La variabile y assume diversi significati a seconda del sistema fisico in esame. Nel caso di propagazione di onde longitudinali piane nell'aria, l'equazione (7.19) è soddisfatta (a patto di trascurare fenomeni di dissipazione) sia dalla pressione p sia dal flusso u : si osservi che la coppia di variabili (p, u) costituisce l'esempio fluidodinamico di variabili di Kirchhoff, definite e trattate nella sezione 7.2. Nel caso di una corda ideale, la funzione y può essere identificata sia con la velocità trasversale della corda sia con la forza: anche in questo caso la coppia (f, v) è l'esempio meccanico di variabili di Kirchhoff.

Affinché l'equazione (7.19) sia dimensionalmente corretta la costante c deve avere le dimensioni [m/s] di una velocità. Nel caso di propagazione di onde piane in aria, la costante c assume il valore $c = \sqrt{\gamma p_a / \rho}$, dove γ è un "coefficiente di elasticità" dell'aria, mentre p_a, ρ sono rispettivamente la pressione atmosferica e la densità di volume dell'aria; per la corda ideale si ha $c = \sqrt{K / \rho}$, dove K è definita come tensione della corda e ρ è la densità lineare della corda. In entrambi i casi è immediato verificare che le dimensioni di c sono quelle di una velocità.

7.4.1 Variabili d'onda e impedenza d'onda

Un risultato fondamentale a proposito dell'equazione (7.19) è che è possibile scrivere la sua soluzione generale⁶, la quale assume la forma

$$y(x, t) = y^+(ct - x) + y^-(ct + x), \quad (7.20)$$

Come è ben noto, la funzione y^+ descrive una forma che trasla rigidamente verso destra con velocità c , e analogamente y^- descrive una forma che trasla verso sinistra con identica velocità. Le funzioni y^\pm sono a priori funzioni qualsiasi, la loro forma sarà determinata dall'imposizione di opportune condizioni al contorno (in spazio) e condizioni iniziali (in tempo). Dalla (7.20) è dunque chiaro che l'equazione delle onde descrive fenomeni propagatori con velocità c .

Le funzioni $y^\pm(n)$ vengono indicate con il nome di *variabili d'onda*. Vogliamo ora esaminare la relazione che intercorre tra una coppia di variabili d'onda e le corrispondenti variabili di Kirchhoff; a tal fine si introduce una nuova quantità, l'*impedenza d'onda* Z_0 . Si considera per chiarezza l'esempio di un *tubo cilindrico* ideale di sezione costante S . Con buona approssimazione in esso si propagano onde piane longitudinali, dunque è lecito assumere che sia soddisfatta l'equazione (7.19), dove la variabile spaziale x è parallela all'asse del cilindro. All'interno del tubo cilindrico la pressione ed il flusso sono tra loro legati dall'equazione (ricavata dalla legge di Newton):

$$-\frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t). \quad (7.21)$$

Inoltre, per quanto detto in generale sulla soluzione dell'equazione delle onde, sia la pressione p sia il flusso u possono essere scritti come

$$p(x, t) = p^+(ct - x) + p^-(ct + x) \quad u(x, t) = u^+(ct - x) + u^-(ct + x).$$

(osserviamo che la scelta dei segni nell'espressione per u non è univoca in letteratura; in particolare, le u^\pm possono essere definite in maniera tale che per la per-variabile intensiva u valga $u = u^+ - u^-$. In queste pagine si è scelto di seguire la convenzione più comunemente adottata). Sostituendo queste espressioni nella (7.21) si ottiene

$$\begin{aligned} -\frac{S}{\rho}[p^{+'}(ct - x) - p^{-'}(ct + x)] &= c[u^{+'}(ct - x) + u^{-'}(ct + x)] \\ \Rightarrow \quad \begin{cases} p^+ = Z_0 u^+ \\ p^- = -Z_0 u^- \end{cases} &\quad \text{con} \quad Z_0 = \frac{\rho c}{S} \end{aligned} \quad (7.22)$$

(il segno $'$ indica la derivazione rispetto all'argomento). La costante Z_0 viene detta *impedenza d'onda*. In maniera naturale, la quantità $Z_0^{-1} := \Gamma_0$ viene detta *ammittenza d'onda*. Quanto detto fin qui sul tubo cilindrico può essere generalizzato: è possibile introdurre un'impedenza d'onda per la corda, così come per tubi di profilo qualsiasi. In generale non si troverà una Z_0 reale e costante, ma piuttosto una $Z(s)$ complessa⁷.

⁶Mentre nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie si sa dire tutto sulla soluzione generale di un qualsiasi sistema lineare, nel campo delle equazioni alle derivate parziali (PDE, Partial Differential Equations) i risultati generali sono pochi; nella maggior parte dei casi la soluzione di una PDE lineare non è nota, e si può solo studiare l'andamento di soluzioni particolari mediante simulazioni numeriche. In questo senso, l'equazione delle onde costituisce una notevole eccezione.

⁷Corrispondentemente le relazioni $p^\pm = \pm Z_0 u^\pm$ divengono $P^+(s) = Z(s) \cdot U^+(s)$ e $P^-(s) = -Z^*(-s^*) \cdot U^-(s)$. Si veda più avanti (sezione 7.4.4) il caso di un tubo di profilo conico.

Tramite l'impedenza d'onda, sia la pressione p sia il flusso u sono esprimibili in funzione delle sole variabili d'onda p^\pm :

$$p(x,t) = p^+(ct-x) + p^-(ct+x), \quad u(x,t) = \frac{1}{Z_0}[p^+(ct-x) - p^-(ct+x)] \quad (7.23)$$

Le relazioni inverse delle (7.23) sono

$$p^+(ct-x) := \frac{p(x,t) + Z_0u(x,t)}{2} \quad p^-(ct-x) := \frac{p(x,t) - Z_0u(x,t)}{2} \quad (7.24)$$

(osserviamo che geometricamente le (7.23)/(7.24) non sono altro che una rotazione del piano in sé, dalle coordinate (p, Z_0u) alle coordinate (p^+, p^-) e viceversa).

L'esistenza della soluzione (7.20), e la conseguente introduzione di variabili d'onda, costituisce il punto di partenza per la costruzione di modelli waveguide. Questi si basano infatti sulla possibilità di discretizzare la soluzione dell'equazione delle onde piuttosto che l'equazione stessa, con conseguente guadagno sia in accuratezza sia in efficienza computazionale.

A titolo di esempio, si consideri ancora la pressione p all'interno di un tubo cilindrico; si vuole discretizzare la soluzione $p = p^+ + p^-$. Se il periodo di campionamento è T [s], una scelta naturale per l'intervallo di campionamento spaziale è $X = cT$ [m]. La discretizzazione è dunque effettuata operando il cambio di variabili $x \rightarrow mX$ e $t \rightarrow nT$.

$$p(mX, nT) = p^+(ncT - mX) + p^-(ncT + mX) = p^+[(n-m)cT] + p^-[(n+m)cT]$$

Dal momento che moltiplica tutti gli argomenti, la costante cT può essere omessa:

$$p(m, n) = p^+(n-m) + p^-(n+m) \quad (7.25)$$

Il termine $p^+(n-m)$ è l'uscita di una linea di ritardo di m campioni, il cui ingresso è $p^+(n)$; all'opposto, il termine $p^-(n+m)$ è l'ingresso di una uguale linea di ritardo, la cui uscita è $p^-(n)$. Una *sezione waveguide* è dunque composta da una coppia di linee di ritardo contrapposte come in figura 7.6. Ad

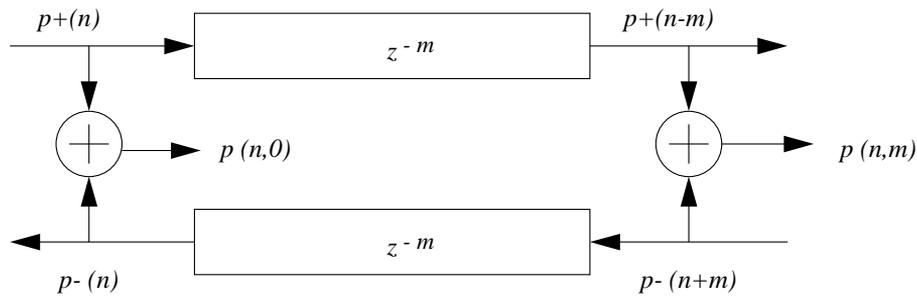


Figura 7.6: Sezione waveguide di m campioni spaziali. In ogni istante il segnale in $x=0$ e $x=mX$ è la somma ingresso/uscita dalle due linee di ritardo.

ogni tempo n il valore assunto da p nei punti $x=0$ ed $x=mX$ si ottiene prelevando i segnali ai capi della sezione e sommandoli.

La descrizione dell'andamento delle variabili d'onda all'interno di una sezione waveguide è completata dalla presenza di terminazioni, o più in generale di giunzioni con altre sezioni simili. Si

supponga ad esempio di modellare un tubo cilindrico ideale di lunghezza $L = m_L X$, chiuso in $x = 0$ e aperto in $x = m_L X$; in questo caso le condizioni ai bordi per pressione e flusso sono $u(0, n) = 0$ e $p(m_L, n) = 0$ per ogni tempo n . Per le variabili d'onda si trovano allora le condizioni di riflessione $p^-(0, n) = p^+(0, n)$ e $p^-(m_L, n) = -p^+(m_L, n)$. La prossima sezione è dedicata allo studio di terminazioni e giunzioni meno banali.

7.4.2 Scattering

Quando l'impedenza d'onda subisce una variazione si verifica *scattering*: le onde che incontrano una discontinuità dell'impedenza vengono in parte riflesse ed in parte trasmesse al di là della giunzione, in maniera tale che l'energia complessiva sia conservata. Un semplice esempio è costituito dall'accostamento di due tubi cilindrici aventi sezioni diverse $S_{1,2}$. In ciascuno dei due tubi le variabili d'onda p, u sono tra loro legate da impedenze caratteristiche distinte $Z_{1,2}$ (e dalle corrispondenti ammettenze $\Gamma_{1,2} = Z_{1,2}^{-1}$); alla giunzione i vincoli di continuità impongono che la pressione sia la stessa da destra e da sinistra e che i flussi si sommino a zero: dunque, secondo le definizioni date nella sezione 7.2.2, la giunzione è di tipo parallelo.

Un esame di questo problema porta alla derivazione delle ben note equazioni della *giunzione di Kelly Lochbaum*.

Nel caso di giunzione in parallelo i vincoli di continuità imposti dalle leggi di Kirchhoff sono

$$u_1 + u_2 = 0, \quad p_1 = p_2 = p_J \quad (7.26)$$

In termini di variabili d'onda, la seconda delle (7.26) viene riscritta come $p_1^- = p_1 - p_1^+ = p_J - p_1^+$. Sostituendo questa nella prima delle (7.26) si ottiene allora

$$\begin{aligned} 0 &= (u_1^+ + u_1^-) + (u_2^+ + u_2^-) = \Gamma_1(p_1^+ - p_1^-) + \Gamma_2(p_2^+ - p_2^-) = \\ &= \Gamma_1(2p_1^+ - p_J) + \Gamma_2(2p_2^+ - p_J), \end{aligned}$$

e quindi

$$p_J = 2 \frac{\Gamma_1 p_1^+ + \Gamma_2 p_2^+}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Questa esprime la pressione di giunzione p_J in funzione delle onde di pressione entranti e delle due ammettenze. A questo punto siamo in grado di calcolare le onde di pressione uscenti:

$$\begin{aligned} p_1^- &= p_J - p_1^+ = -\frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_2 + \Gamma_1} p_1^+ + \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_2 + \Gamma_1} p_2^+ \\ p_2^- &= p_J - p_2^+ = \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_2 + \Gamma_1} p_1^+ + \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_2 + \Gamma_1} p_2^+. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Definiamo il *coefficiente di riflessione* ρ come

$$\rho := \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_2 + \Gamma_1}.$$

Le (7.27) diventano allora

$$\begin{aligned} p_1^- &= -\rho p_1^+ + (1+\rho)p_2^+ \\ p_2^- &= (1-\rho)p_1^+ + \rho p_2^+ \end{aligned} \quad (7.28)$$

Queste sono le equazioni della giunzione di Kelly Lochbaum. Il diagramma di scattering è mostrato in figura 7.7

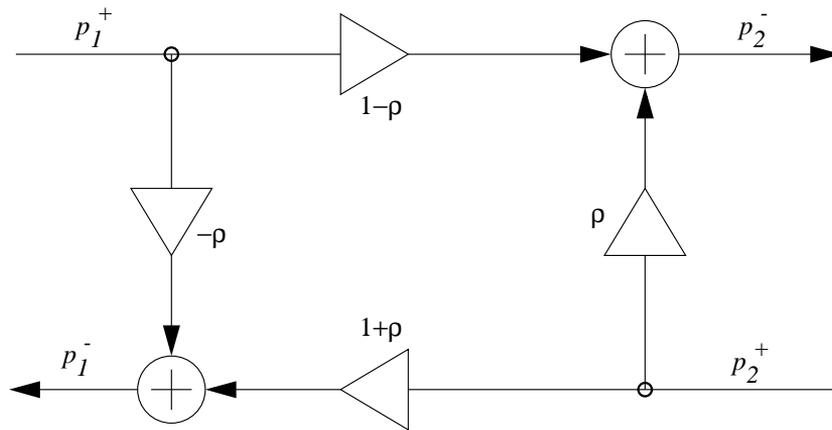


Figura 7.7: Giunzione di scattering nella forma di Kelly Lochbaum.

Le (7.28) si possono anche riscrivere come

$$\begin{aligned} p_1^- &= \rho(p_2^+ - p_1^+) + p_2^+ \\ p_2^- &= \rho(p_2^+ - p_1^+) + p_1^+ \end{aligned} \quad (7.29)$$

le quali mostrano che la giunzione richiede in realtà un solo moltiplicatore.

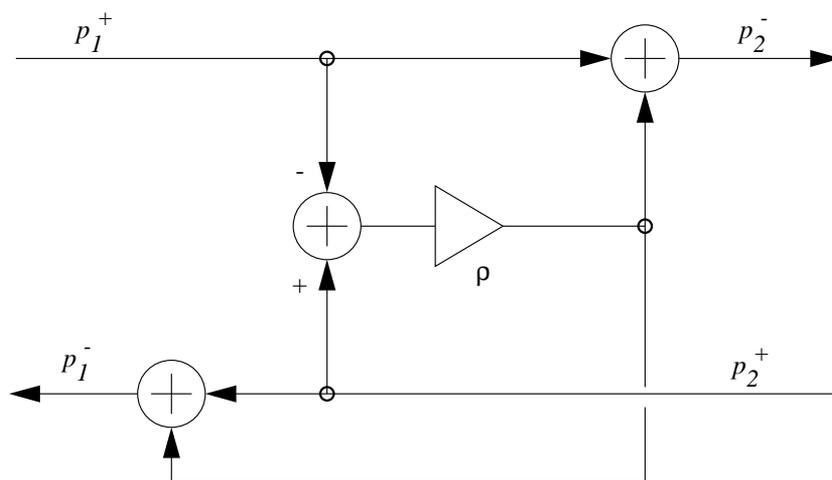


Figura 7.8: Giunzione di scattering nella forma ad un moltiplicatore.

Osserviamo in conclusione che il risultato espresso dalla (7.28) può essere esteso in maniera abbastanza immediata al caso di giunzione tra N elementi. Il problema consiste in questo caso nel trovare una *matrice di scattering* \mathbf{A} di dimensioni $N \times N$ tale che alla giunzione si abbia

$$\underline{p}^- = \mathbf{A} \cdot \underline{p}^+, \quad (7.30)$$

dove \underline{p}^\pm sono i vettori N -dimensionali delle onde entranti ed uscenti. L'imposizione di condizioni di continuità analoghe alle (7.26) e passaggi del tutto simili a quelli appena svolti portano al seguente risultato:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_J} - 1, & \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_J}, & \cdots & \frac{2\Gamma_N}{\Gamma_J} \\ \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_J}, & \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_J} - 1, & \cdots & \frac{2\Gamma_N}{\Gamma_J} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{2\Gamma_1}{\Gamma_J}, & \frac{2\Gamma_2}{\Gamma_J}, & \cdots & \frac{2\Gamma_N}{\Gamma_J} - 1 \end{bmatrix} \quad (\Gamma_J = \sum_{l=1}^N \Gamma_l).$$

Si osservi che nel caso $N = 2$ la (7.30) coincide effettivamente con la (7.28).

7.4.3 Dispersione e dissipazione

I modelli waveguide esaminati fino a questo punto sono stati dedotti a partire dall'equazione delle onde (7.19), la quale è però valida solo per mezzi ideali. Nella realtà fisica sono presenti fenomeni di cui l'equazione (7.19) non tiene conto, e che vanno invece presi in considerazione al fine di ottenere modelli più realistici.

In ogni corda reale, così come nell'aria, si verifica *dissipazione* di energia, dovuta a varie cause. In una corda si possono individuare almeno tre cause principali di dissipazione: l'attrito causato dalla viscosità dell'aria, perdite interne dovute alle proprietà elastiche del materiale, trasferimento di energia attraverso le terminazioni. In un tubo acustico, un'onda sonora subisce attenuazioni dovute alla viscosità ed alla conduzione termica, sia del mezzo sia delle pareti del tubo stesso.

In prima approssimazione, tutti questi fenomeni possono essere riassunti in un termine di attrito di derivata prima (nel tempo); l'equazione delle onde viene allora modificata in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \mu \frac{\partial y}{\partial t}(x, t), \quad (7.31)$$

Nel limite di piccole vibrazioni, l'equazione (7.31) ammette ancora una soluzione in termini di onde viaggianti⁸

$$y(x, t) = e^{-\frac{\mu x}{2c}} y^+(ct - x) + e^{\frac{\mu x}{2c}} y^-(ct + x) \quad (7.32)$$

Dunque le onde hanno uno smorzamento esponenziale nella loro direzione di propagazione, il quale non dipende dalla frequenza.

Se si discretizza la (7.32) con passi T e $X = cT$, così come è stato fatto nella sezione 7.4.1, si ottiene la seguente soluzione:

$$y(n, m) = g^m y^+(n - m) + g^{-m} y^-(n + m) \quad \text{dove} \quad g = e^{-\frac{\mu T}{2}} < 1 \quad (7.33)$$

⁸Si provi a derivare la soluzione (7.32), verificando che nel limite di piccole oscillazioni soddisfa effettivamente l'equazione (7.31).

La dissipazione viene quindi simulata inserendo un moltiplicatore di peso g dopo ogni elemento di ritardo z^{-1} o, in maniera più efficiente e del tutto equivalente, inserendo un moltiplicatore di peso g^m dopo una linea di ritardo z^{-m} .

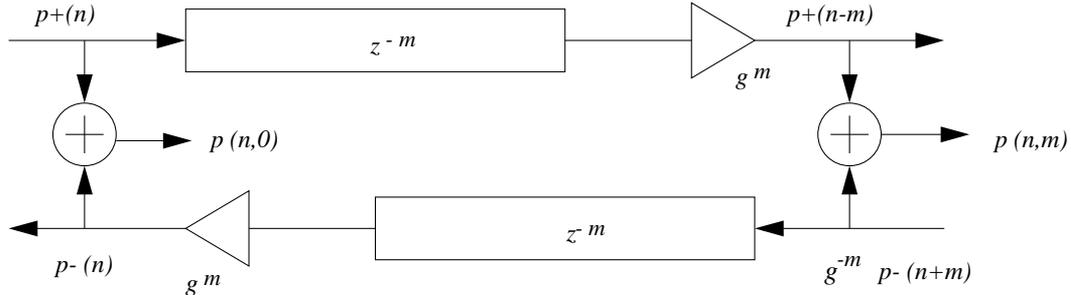


Figura 7.9: Sezione waveguide con dissipazione indipendente dalla frequenza.

Un modello più accurato di dissipazione deve tenere conto del fatto che nella realtà le perdite dipendono dalla frequenza, diventando più sensibili alle frequenze più alte. Perdite di questa natura possono venire prese in considerazione aggiungendo nell'equazione delle onde ulteriori termini, in cui compaiono derivate dispari di ordine superiore. Nel modello waveguide i fattori di dissipazione g vengono sostituiti da filtri $G(z)$. In tal modo, però, si rischia di introdurre nella linea ritardi dipendenti dalla frequenza: si deve dunque richiedere che i filtri siano a fase nulla, o quantomeno a fase lineare.

Oltre che per i fenomeni di dissipazione appena descritti, una corda reale differisce da quella ideale anche perché possiede una propria *rigidità*. Questo significa che quando la corda è sottoposta ad una deformazione si sviluppano delle forze interne che tendono a riportarla nella posizione di equilibrio. È noto che tali forze introducono nell'equazione delle onde un termine di derivata quarta (in spazio):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - k \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t), \quad (7.34)$$

dove la costante k è proporzionale al modulo di Young del materiale della corda. Si noti che per alti valori di k e per tensione della corda tendente a zero l'equazione (7.34) diventa l'equazione della sbarra $\ddot{y} = ky''''$.

Il principale effetto del termine di rigidità è quello di causare *dispersione*. In termini generali, una relazione di dispersione è data da una qualsiasi dipendenza del tipo $c = c(\omega)$, ovvero una dipendenza della velocità c di propagazione dalla pulsazione ω dell'onda. Dire che c non è costante rispetto ad ω significa dire un'onda si “disperde” progressivamente nelle sue varie componenti durante la propagazione; dunque la soluzione dell'equazione (7.34) non potrà più essere composta da forme che traslano rigidamente.

Nel limite di piccole rigidità, uno sviluppo al primo ordine consente di arrivare alla relazione di dispersione

$$c(\omega) = c_0 \left(1 + \frac{k\omega^2}{2} \right) \quad (7.35)$$

dove per chiarezza si è indicata con c_0 la velocità in assenza di rigidità. L'equazione (7.35) afferma che la velocità aumenta per le frequenze più alte; questo fenomeno può avere delle conseguenze udibili, ad esempio nelle corde gravi di pianoforte (che producono uno spettro le cui parziali sono “stirate” rispetto alla serie armonica).

Al fine di simulare fenomeni dispersivi all'interno di un modello waveguide, è necessario osservare prima di tutto che non è più possibile definire il passo temporale come una costante $X_0 = c_0 T$. Quello che si può dire è che una componente di pulsazione ω percorre lo spazio $c_0 T$ nel tempo $c_0 T / c(\omega)$. Questa considerazione porta a sostituire il ritardo unitario z^{-1} con un *filtro all-pass* $H_a(z) = z^{-c_0/c(\omega)}$, la cui risposta in fase non è più lineare. Ancora una volta, può essere opportuno per ragioni di complessità computazionale accorpate m singoli elementi H_a in un unico filtro H_a^m . In aggiunta si possono separare la parte lineare e quella non lineare della risposta in fase, arrivando a scrivere $H_a^m(z) = z^{-m} \cdot H_A(z)$; il filtro H_A è ancora un filtro all-pass, che approssima la parte non lineare della risposta in fase.

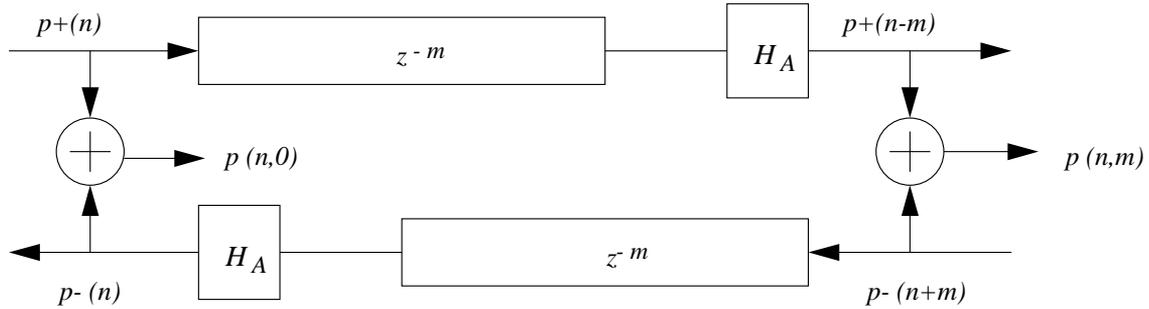


Figura 7.10: Sezione waveguide con dispersione: la risposta in fase del filtro all-pass H_A modella la dispersione della corda.

7.4.4 Tubi conici

Nelle sezioni precedenti si è esaminato con un certo dettaglio il caso del tubo cilindrico: in esso si propagano onde piane, cosicché valgono l'equazione delle onde monodimensionale (7.19) e la sua soluzione (7.20). Il problema della propagazione in un tubo acustico di profilo qualsiasi è molto più complicato, e viene affrontato in maniera rigorosa solo per i casi conico ed iperbolico. In questa sezione accenniamo brevemente alla deduzione di modelli waveguide per profili conici.

Si osserva innanzitutto che all'interno di un profilo conico si propagano sferiche, e non più piane. È noto che in coordinate sferiche (r, θ, ϕ) il laplaciano assume la forma

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

(un po' di derivate composte ed un po' di pazienza sono sufficienti per dimostrare questo risultato). Nel caso più semplice di onde sferiche non c'è dipendenza da θ e da ϕ , dunque il secondo ed il terzo addendo scompaiono e l'espressione si semplifica. In definitiva l'equazione delle onde per propagazione a simmetria sferica è ancora un'equazione monodimensionale:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(r, t) = c^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial y}{\partial r} \right)(r, t). \quad (7.36)$$

Si operi allora la sostituzione $y = \tilde{y}/r$. È immediato verificare che la funzione \tilde{y} soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial t^2}(r, t) = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial r^2}(r, t), \quad (7.37)$$

che non è altro che l'equazione delle onde (7.19). Dunque si ha la soluzione generale $\tilde{y} = y^+ + y^-$, e quindi

$$y(r, t) = \frac{1}{r} \tilde{y}(r, t) = \frac{1}{r} [y^+(ct - r) + y^-(ct + r)] \quad (7.38)$$

Dunque il segnale che si propaga nel tubo conico è ancora esprimibile come somma di onde viaggianti; questa volta, però, l'ampiezza di queste non è costante, ma proporzionale⁹ a r^{-1} .

In virtù di questo risultato, l'andamento di pressione e flusso all'interno di un tubo conico è ancora modellizzabile mediante guide d'onda, a patto di riscalarne opportunamente il segnale.

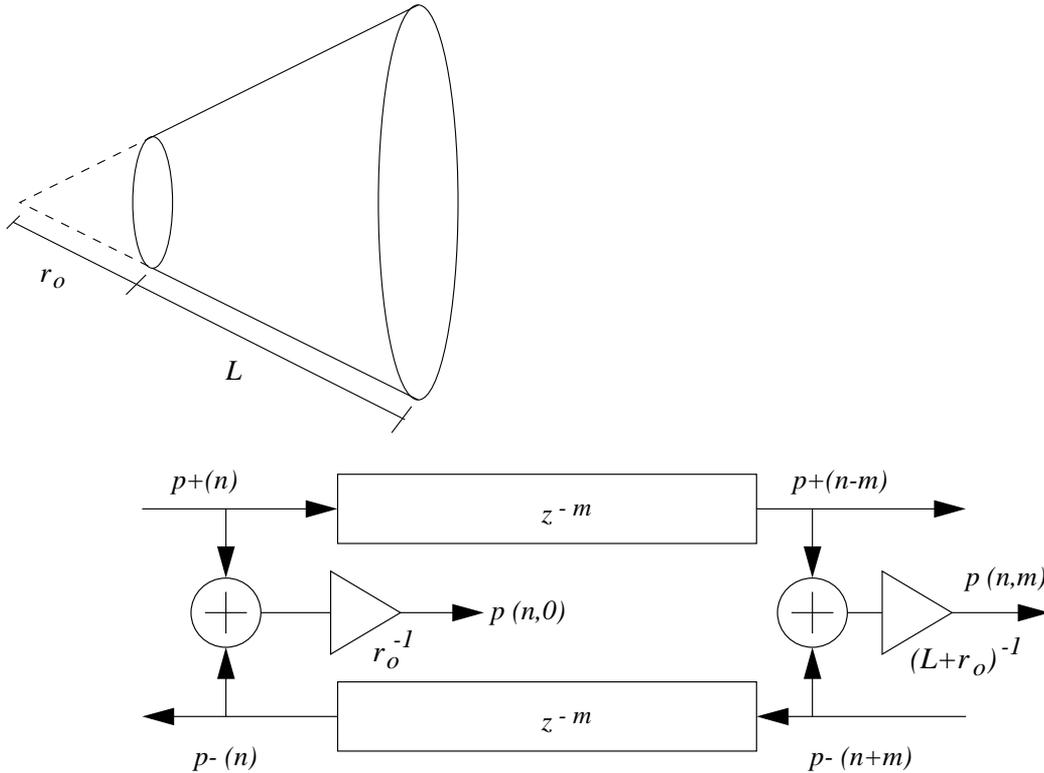


Figura 7.11: Modello waveguide per una sezione di cono di lunghezza L e distante r_0 dall'apice.

Ricaviamo infine l'espressione per l'impedenza d'onda nel caso di tubi conici. Vale una relazione analoga alla (7.21), ricavata dalla legge di Newton:

$$-\frac{S(r)}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(r, t), \quad (7.39)$$

dove $S(r)$ è questa volta l'area della calotta sferica sottesa dal cono al punto r . In termini di variabili d'onda la (7.39) diviene

$$\dot{u} = -\frac{S(r)}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{r} (p^{-\prime} - p^{+\prime}) - \frac{1}{r^2} (p^+ + p^-) \right] = -\frac{S(r)}{\rho} \cdot \left[\frac{1}{rc} (\dot{p}^+ - \dot{p}^-) - \frac{1}{r^2} (p^+ + p^-) \right]$$

⁹Intuitivamente, questo risultato è giustificato dall'idea che il prodotto tra ampiezza del segnale ($\sim r^{-2}$) e superficie attraversata ($\sim r^2$) deve rimanere costante.

dove l'ultimo passaggio è giustificato dall'osservazione che $p^\pm = cp^{\pm'}$ (il segno ' indica come al solito la derivazione rispetto all'argomento). Passando alla trasformata di Laplace questa diventa

$$s \cdot U = \frac{S(r)}{\rho r^2} \left[P^+ \cdot \left(1 + \frac{r}{c} s \right) + P^- \cdot \left(1 - \frac{r}{c} s \right) \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U^+(s, r) = \Gamma(s) \cdot P^+(s, r) \\ U^-(s, r) = -\Gamma^*(-s^*) \cdot P^-(s, r) \end{cases} \quad \text{con} \quad \Gamma(s) = \Gamma_0 \left(1 + \frac{c}{rs} \right), \quad \Gamma_0 = \frac{S}{\rho c} \quad (7.40)$$

$\Gamma(s)$ è dunque l'ammettenza d'onda per il cono, e per definizione l'impedenza d'onda è $Z(s) = \Gamma^{-1}(s)$. A differenza del profilo cilindrico, che produce un'impedenza d'onda reale, il profilo conico produce una $Z(s)$ complessa; conseguentemente, lo scattering prodotto dalla giunzione tra due sezioni coniche sarà di più difficile trattazione. Si osservi infine che nel limite in cui il cono diventa un cilindro (ovvero nel limite in cui $r \rightarrow \infty$) si trova coerentemente $Z(s) \rightarrow Z_0$ del tubo cilindrico.

7.5 Un esempio completo: il clarinetto

In questa sezione ci occupiamo della deduzione e dello studio di un modello di clarinetto. Questa particolare scelta è dettata da alcune ragioni; innanzitutto, si tratta di un modello da sempre molto studiato, sul quale la letteratura è vastissima e molte proprietà sono note. In secondo luogo, esso fornisce un esempio interessante di meccanismo di eccitazione, persistente nel tempo e basato sull'azione non lineare dell'ancia. La presenza nel modello di non linearità e di retroazione è fonte, come si vedrà, di alcuni problemi di non immediata soluzione.

Pur nella sua relativa semplicità, dunque, il modello di clarinetto che verrà presentato in queste pagine costituisce un'utile introduzione a problematiche tipiche della modellazione di sistemi acustici.

Il significato dei simboli che verranno utilizzati nel seguito può essere letto nella tabella 7.2.

Come di consueto, il sistema viene suddiviso nei suoi due principali blocchi funzionali, eccitatore e risonatore. Questi sono riconoscibili rispettivamente nel sistema ancia-bocchino e nel tubo acustico. Il blocco formato da ancia e bocchino svolge il ruolo di valvola non lineare, e regola la differenza Δp tra la pressione P_0 all'interno della bocca dell'esecutore e la pressione $p = p^+ + p^-$ all'interno del bocchino; il tubo acustico costituisce il blocco risonatore del sistema, ed è a sua volta costituito da sottoblocchi quali, ad esempio, la campana ed i fori.

7.5.1 Risonatore ed eccitatore

Il blocco risonatore per il clarinetto non comporta, almeno in prima approssimazione, grosse difficoltà di modellazione; questo è dovuto al fatto che il tubo acustico è con ottima approssimazione cilindrico, cosicché vale l'equazione delle onde per la propagazione di onde piane.

L'utilizzo di tecniche di modellazione di tipo waveguide descritte nella sezione 7.4 risulta particolarmente efficiente ed efficace. La scelta più semplice è quella di assumere il risonatore come un tubo acustico cilindrico ideale, in cui l'onda di pressione p^+ uscente dal bocchino si propaga senza perdite ed ha una riflessione perfetta (con cambio di segno) all'estremità aperta del tubo stesso. In formule, questo significa assumere che l'onda p^- entrante nel bocchino è data da:

$$p^-(n) = -p^+(n - 2N) \quad \Leftrightarrow \quad P^-(z) = -z^{-2N} P^+(z).$$

<i>Quantità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Valore</i>
Massa/area dell'ancia	μ_r	0.0231 Kg/m ²
Area efficace dell'ancia	S_r	$1.46 \cdot 10^{-4}$ m ²
Freq. di risonanza dell'ancia	ω_0	23250 rad/s
ω_0 al quadrato	ω_r	23250^2 (rad/s) ²
Smorzamento dell'ancia	g_r	3000 s ⁻¹
Apertura a riposo	H	$\sim 0.4 \cdot 10^{-3}$ m
Parametro di ampiezza	A	0.0797 m ³ /(N ^{2/3} s)
Impedenza d'onda	Z_0	2290133 Kg/m ⁴ s
Pressione nella bocca	P_0	N/m ²
Onda di pressione dal tubo	p^-	N/m ²
Onda di pressione verso il tubo	p^+	N/m ²
Pressione nel bocchino	$p = p^+ + p^-$	N/m ²
Flusso al bocchino	$u = \frac{1}{Z_0}(p^+ - p^-)$	m ³ /s
Flusso totale all'apertura	u_f	m ³ /s
Posizione dell'ancia	x_r	m

Tabella 7.2: Simboli per variabili e costanti nel modello del clarinetto.

Il numero $2N$ di ritardi unitari dipende dalla lunghezza L del tubo e dal periodo di campionamento T ; precisamente, vale $L = c \cdot NT$.

Un modello più accurato, anche se ancora molto semplice, consiste nel prendere in considerazione la radiazione di suono verso l'esterno operata dalla campana. Questa può essere vista come un filtro passabasso, il quale riflette le basse frequenze verso l'interno ed irradia le frequenze al di sopra di una certa f_c di taglio; valori tipici di f_c si aggirano intorno ai 1500 Hz. Sia dunque $H_{\text{bell}}(z)$ la funzione di trasferimento di un filtro passabasso con frequenza di taglio f_c ; l'onda p^- entrante nel bocchino è allora data da

$$p^-(n) = -(h_c * p^+)(n - 2N) \quad \Leftrightarrow \quad P^-(z) = -z^{-2N} H_c(z) P^+(z).$$

La parte del segnale trasmessa dalla campana verso l'esterno è invece data da

$$p_{\text{out}}(n) = p^+(n - N) + (h_c * p^+)(n - N) \quad \Leftrightarrow \quad P_{\text{out}}(z) = z^{-N} [1 + H_c(z)] P^+(z).$$

Ulteriori raffinamenti a questo modello sono possibili. La presenza di perdite, in generale dipendenti dalla frequenza può essere simulata introducendo opportuni filtri $G(z)$, la cui risposta in ampiezza fornisca la dissipazione richiesta e la cui risposta in fase sia perlomeno lineare (per non introdurre ritardi dipendenti dalla frequenza); anche la presenza di fori può essere modellizzata tramite filtri di scattering posti lungo la linea di ritardo.

Di maggiore interesse è il modello del blocco eccitatore, costituito da ancia e bocchino come schematicamente rappresentato in figura 7.12.

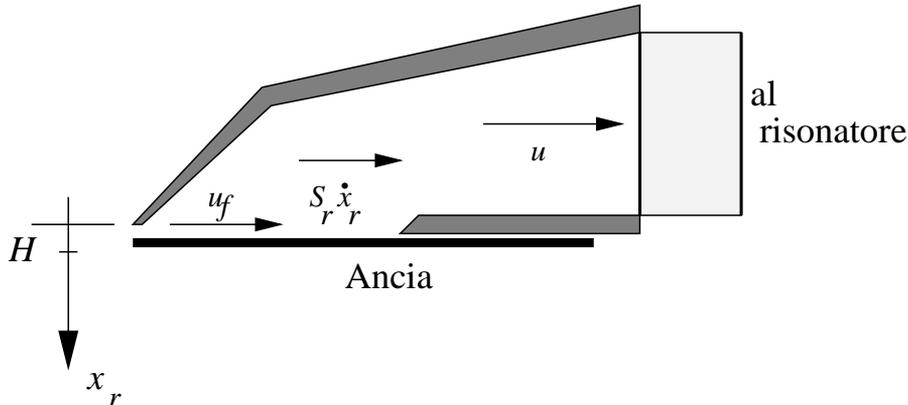


Figura 7.12: Schema di ancia e bocchino nel clarinetto.

In accordo con molti autori l'ancia può, con buona approssimazione, essere vista come un corpo rigido; la sua dinamica viene dunque descritta unicamente dalla posizione x_r . In altre parole, in questa approssimazione l'ancia è un *elemento concentrato*. La sua equazione del moto è quella di un semplice oscillatore armonico, forzato dalla differenza di pressione $\Delta p = P_0 - p$:

$$\Delta p(t) = \mu_r [\ddot{x}_r(t) + g_r \dot{x}_r(t) + \omega_r (x_r(t) - H)] \quad (7.41)$$

Si può in corrispondenza studiare la funzione di trasferimento tra la differenza di pressione Δp e lo spostamento relativo dell'ancia $y_r = x_r - H$. Applicando la trasformata di Laplace alla 7.41 vale la relazione

$$Y_r(s) = H_c(s) \Delta P(s) \quad \text{con} \quad H_c(s) = \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{s^2 + g_r s + \omega_r}. \quad (7.42)$$

In figura 7.13 è riportato il grafico della corrispondente risposta in frequenza $H_c(j\omega)$ (modulo e fase).

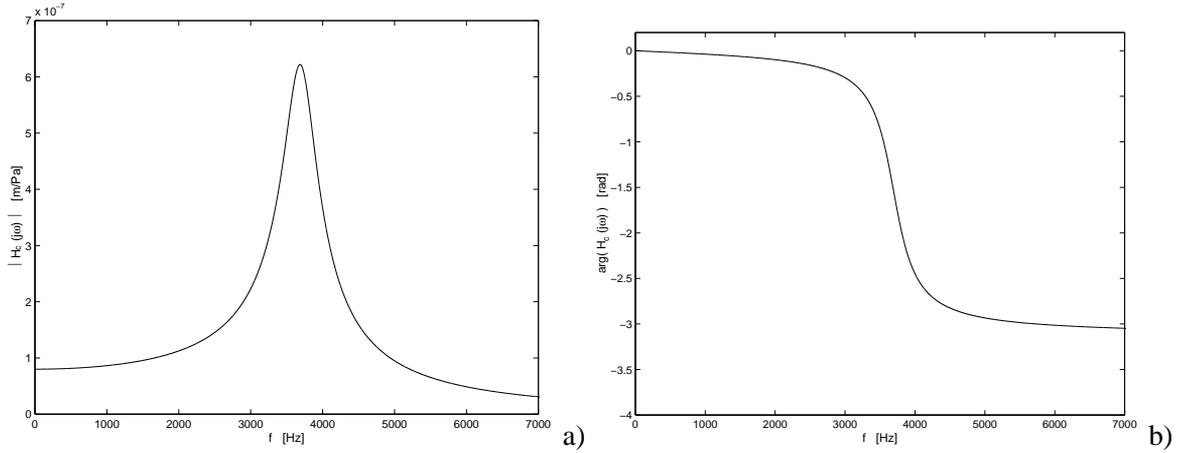


Figura 7.13: Risposta in frequenza $H_c(j\omega)$ a) ampiezza, e b) fase.

L'equazione (7.41) è completata da una relazione non lineare che lega la differenza di pressione Δp ed il flusso totale u_f attraverso l'apertura dell'ancia; questa è sostanzialmente ottenuta sulla base della legge di Bernoulli ed attraverso misurazioni sperimentali¹⁰, ed assume la forma

$$u_f = \begin{cases} A \cdot x_r^{\frac{4}{3}} \cdot |\Delta p|^{\frac{2}{3}} \text{sgn}(\Delta p) & \text{se } x_r > 0 \\ 0 & \text{se } x_r = 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

Si noti che la natura non lineare di questa relazione è data anche dalla presenza di condizioni di contatto, che impongono di forzare a zero il flusso u_f quando l'ancia si chiude completamente. La relazione inversa della (7.43), che esprime Δp in funzione di u_f e x_r , è data da

$$\Delta p = A^{-\frac{3}{2}} \text{sgn}(u_f) |u_f|^{\frac{3}{2}} / x_r^2 := f(u_f, x_r). \quad (7.44)$$

Il flusso u_f è a sua volta la somma di due componenti: il flusso $u = \frac{1}{Z_0}(p^+ - p^-)$ nel bocchino ed il flusso $S_r \dot{x}$ determinato dal movimento dell'ancia:

$$u_f(t) = \frac{1}{Z_0}(p^+(t) - p^-(t)) + S_r \dot{x}_r(t).$$

Riassumendo, l'eccitatore è composto da un blocco dinamico lineare **L** ed un blocco non lineare senza memoria **NL**, i quali interagiscono in uno schema in feedback secondo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{L}: \quad & \mu_r [\ddot{x}_r(t) + g_r \dot{x}_r(t) + \omega_r (x_r(t) - H(t))] = -\Delta p(t) \\ & u_f(t) = Z_0^{-1} (p^+(t) - p^-(t)) + S_r \dot{x}_r(t) \\ \mathbf{NL}: \quad & p^+(t) = P_0(t) - p^-(t) - f(u_f, x). \end{aligned} \quad (7.45)$$

¹⁰La legge di Bernoulli, valida per un fluido non viscoso ed incomprimibile in moto stazionario, stabilisce che attraverso l'apertura dell'ancia valga la relazione $u_f = A \cdot x \cdot \Delta p^{1/2} \text{sgn}(\Delta p)$. Questa viene generalizzata da una relazione del tipo $u_f = A \cdot x^{\nu} \Delta p^{\mu} \text{sgn}(\Delta p)$, dove la costante A e gli esponenti μ, ν vengono determinati sperimentalmente. Una scelta comunemente accettata è $\mu = \frac{2}{3}$ e $\nu = \frac{4}{3}$

7.5.2 Attacchi e comportamento a regime

Come evidenziato dalla tabella 7.2 e in figura 7.13, la frequenza di risonanza di un'ancia di clarinetto è tipicamente molto più alta delle fondamentali delle note eseguibili su tutti i registri. Il valore scelto in queste pagine, ad esempio, è di ~ 3700 Hz. È dunque ragionevole assumere che a regime valga un'approssimazione *quasi statica* della risposta dell'ancia alla differenza di pressione Δp : in tale approssimazione la relazione esatta $Y_r(s) = H_c(s)\Delta P(s)$ (cfr. eq. (7.42)) viene sostituita dalla più semplice

$$Y_r(s) \sim H_c(0) \cdot \Delta P(s) \quad (7.46)$$

La (7.46) è giustificata dall'assunzione che lo spettro di p sia concentrato nella regione di bassa frequenza, in cui è lecita l'approssimazione $H_c(j\omega) \sim H_c(0)$ (si veda ancora la figura 7.13). L'inverso della quantità $H_c(0)$ prende di solito il nome di *rigidità* (stiffness) dell'ancia; è immediato verificare dalla (7.42) che vale $H_c(0) = \frac{1}{\mu_r \omega_r}$.

Riassumendo, l'approssimazione quasi statica porta ad affermare che a regime il moto dell'ancia segue la legge

$$x_r(t) = H - \frac{1}{\mu_r \omega_r} \cdot \Delta p(t)$$

Sostituendo quest'ultima nella relazione non lineare (7.43) si ottiene

$$u_f = \begin{cases} A \left(H - \frac{1}{\mu_r \omega_r} \cdot \Delta p(t) \right)^{\frac{4}{3}} \cdot |\Delta p|^{\frac{2}{3}} \cdot \text{sgn}(\Delta p) & \text{se } \Delta p < H \mu_r \omega_r \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (7.47)$$

Nell'equazione (7.47) la dinamica dell'ancia è dunque scomparsa, e si stabilisce un legame diretto tra il flusso u_f e la differenza di pressione Δp . Il grafico della funzione (7.47) è riportato in figura 7.14. Per bassi valori della differenza di pressione u_f cresce monotonicamente con Δp , fino a raggiungere un punto di massimo realizzato per $\Delta p = \frac{H}{3} \mu_r \omega_r$. Al di sopra di tale valore l'ancia comincia a chiudersi e la dipendenza di u_f da Δp diventa monotona decrescente. Al raggiungimento del valore critico $\Delta p = H \mu_r \omega_r$ il flusso si annulla; al di sopra di tale valore l'ancia è completamente chiusa e il flusso rimane identicamente nullo.

La mappa (7.47) può essere utilizzata per costruire un modello quasi statico dell'ancia singola; in ogni istante, essendo note la pressione esterna P_0 e l'onda di pressione p^- in arrivo dal risonatore, l'onda p^+ in uscita dall'eccitatore deve essere tale che il punto $[(p^+ + p^-), Z_0^{-1}(p^+ - p^-)]$ appartenga alla curva (7.47).

Due sono le principali osservazioni in merito all'approssimazione quasi statica fin qui descritta. Innanzitutto, essa è utilizzabile solamente a regime; nella fase di attacco del suono, al contrario, è ancora presente il moto libero accanto a quello forzato. In secondo luogo, può essere interessante studiare i limiti di validità di tale approssimazione, anche in condizioni di moto a regime; come si vedrà nella successiva sezione 7.5.4, le simulazioni numeriche evidenziano un comportamento più complesso di quello descritto dalla figura 7.14.

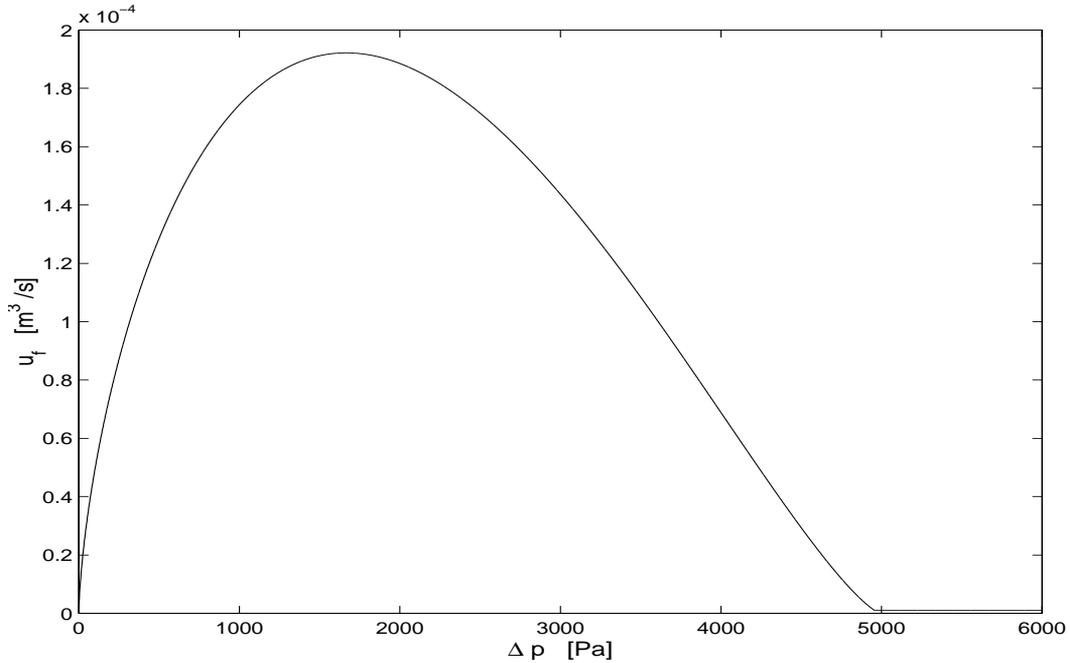


Figura 7.14: Dipendenza di u_f da Δp nell'approssimazione quasi statica.

7.5.3 Equazioni a tempo discreto

Il sistema a tempo continuo (7.45) può essere riscritto in forma vettoriale come segue:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{L}: \quad \dot{w}(t) = \mathbf{A}w(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{C}y(t) \\ \quad \quad x(t) = \mathbf{D}w(t) + \mathbf{E}u(t) + \mathbf{F}y(t) \\ \mathbf{NL}: \quad y(t) = f(x(t)), \end{array} \right\} \quad (7.48)$$

$$\text{essendo} \quad w = \begin{bmatrix} x_r \\ \dot{x}_r \end{bmatrix}, \quad y = -\Delta p, \quad u = \begin{bmatrix} H \\ P_0 \\ p^- \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u_f \\ x_r \end{bmatrix}$$

Il vettore bidimensionale w è il vettore di stato del sistema lineare \mathbf{L} ; u rappresenta un ingresso che raccoglie parametri di controllo esterni quali la pressione dell'esecutore P_0 e la posizione a riposo H dell'ancia, oltre all'onda di pressione p^- in arrivo dal tubo acustico; y è il contributo proveniente dalla relazione non lineare istantanea \mathbf{NL} , e dipende attraverso la funzione f dal vettore $x = (u_f, x_r)^T$. Le matrici usate nelle (7.48) sono

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r & -g_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega_r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\mu_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & S_r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z_0} & -\frac{2}{z_0} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_0} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il blocco dinamico lineare \mathbf{L} del sistema (7.48) può essere discretizzato con varie tecniche; a titolo di esempio si utilizzerà in queste pagine la trasformazione bilineare, che ha peraltro dimostrato una buona accuratezza nelle simulazioni.

Come di consueto si applica la successione *Tr. Laplace* \rightarrow *Tr. bilineare* \rightarrow *Antitr. Z*; pochi semplici passaggi permettono di giungere al risultato:

$$s \cdot W(s) = \mathbf{A}W(s) + \mathbf{B}U(s) + \mathbf{C}Y(s) \quad s = h \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad h = \frac{2}{T}$$

$$\Rightarrow \quad w(n) = [hI - \mathbf{A}]^{-1} \{ [hI + \mathbf{A}]w(n-1) + \mathbf{B}[u(n) + u(n-1)] + \mathbf{C}[y(n) + y(n-1)] \} \quad (7.49)$$

La (7.49) può essere riscritta in forma più compatta come

$$w(n) = \bar{\mathbf{C}}y(n) + s(n), \quad \bar{\mathbf{C}} = [hI - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{C} \quad (7.50)$$

dove è stato posto in evidenza il contributo istantaneo di $y(n)$; il vettore $s(n)$ raccoglie tutti i termini rimanenti e rappresenta il contributo “storico” fornito dalle variabili note al tempo n (ovvero $u(n)$ ed i valori passati di w, u, y). Sostituendo la (7.50) nella seconda delle (7.48) si ottiene per x la seguente espressione:

$$x(n) = \mathbf{K}y(n) + \xi(n), \quad \text{essendo} \quad \begin{cases} \mathbf{K} = (\mathbf{D}\bar{\mathbf{C}} + \mathbf{F}) \\ \xi(n) = \mathbf{E}u(n) + \mathbf{D}[hI - \mathbf{A}]^{-1} \{ (hI + \mathbf{A})w(n-1) \\ + \mathbf{B}[u(n) + u(n-1)] + \mathbf{C}y(n-1) \} \end{cases} \quad (7.51)$$

Anche in questo caso il contributo istantaneo di $y(n)$ è stato posto in evidenza tramite la matrice \mathbf{K} , mentre il vettore $\xi(n)$ raccoglie i termini noti al tempo n . In definitiva, la discretizzazione tramite trasformazione bilineare ha portato ad un sistema della forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L}: \quad w(n) &= \bar{\mathbf{C}}y(n) + s(n) \\ \mathbf{NL}: \quad y(n) &= f(\mathbf{K}y(n) + \xi(n)), \end{aligned} \quad (7.52)$$

dove è riconoscibile un anello senza ritardi tra $y(n)$ e $w(n)$: in particolare la relazione non lineare \mathbf{NL} fa dipendere $y(n)$ da se stessa. Questo problema viene risolto facendo uso del metodo \mathbf{K} ; senza entrare nei dettagli, il metodo dimostra che dalla relazione implicita

$$g(\xi, y) = -y + f(\mathbf{K}y + \xi) = 0$$

è possibile ricavarne una esplicita $y = \bar{f}(\xi)$. Il vettore ξ è a sua volta il vettore di stato di un nuovo sistema lineare, ricavato sostituendo la relazione inversa $w = \mathbf{D}^{-1}[(\mathbf{K} - \mathbf{F})y - \mathbf{E}u + \xi]$ nella prima delle (7.52). In conclusione il sistema (7.52) viene sostituito da un nuovo sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{L}': \quad \xi(n) &= \bar{\mathbf{B}}u(n) + \bar{s}(n) \\ \mathbf{NL}': \quad y(n) &= \bar{f}(\xi), \end{aligned} \quad (7.53)$$

con $\bar{\mathbf{B}}$ e $\bar{s}(n)$ opportuni. Il sistema (7.53) è computabile.

Di seguito si riporta un esempio di implementazione in linguaggio C del modello appena descritto.

```

/* Parte lineare */
  csil=utilde +a1*(H-csi21) +b1*(utilde1 -csi11) +c1*y1;
  csi2=csi21 + a2*(H-csi21) +b2*(utilde1 -csi11) +c2*y1;

/* Parte non lineare*/
  y = nonlinearity(Po,pmeno,ppiu1,csil,csi2);

/*Aggiornamento variabili*/
  x=csi2 + k2*y;
  if (x < BEATDISTANCE)      /*Ancia battente*/
  {
    x = 0;
    ppiu=pmeno;
    y=pmeno+piu-Po;
    csil = -k1*y;
    csi2 = -k2*y;
  }
  else
  {
    ppiu=y-pmeno+Po;
  }
  csil1=csil;
  csi21=csi2;
  utilde1=utilde;
  y1=y;
  ppiu1=ppiu;

```

7.5.4 Risultati

Discutiamo infine i risultati forniti dal modello a tempo discreto appena descritto. Un primo criterio di valutazione viene da un'analisi della risposta in frequenza a tempo discreto $H_d(z)$ dell'ancia. Questa è ricavata dalla risposta a tempo continuo (7.42) per semplice sostituzione:

$$H_d(z) = H_c \left(h \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$

La figura 7.15 riporta i grafici della risposta in frequenza $H_d(e^{j\omega})$ insieme a quelli di $H_c(j\omega)$, ad una frequenza di campionamento di 20 kHz; si può notare warping in frequenza, così come previsto dalla teoria, ma nel complesso la risposta è preservata con sufficiente precisione. In particolare è ben preservato il comportamento in bassa frequenza, ovvero la zona in cui il sistema lavora.

Accanto all'analisi in frequenza è utile studiare il comportamento delle simulazioni nel tempo. In ogni punto del modello è possibile prelevare il segnale corrispondente alle grandezze fisiche più significative ($x_r, \Delta p, p^\pm, u_f \dots$), e studiarne il comportamento al variare dei principali parametri fisici e di controllo ($P_0, H, \omega_r \dots$). Nelle figure 7.16, 7.17 è mostrato l'andamento della posizione x_r dell'ancia quando viene applicato in ingresso un gradino di pressione $P_0 = 1900$ Pa. Il risonatore è in questo caso una semplice linea di ritardo con riflessione perfetta all'estremità aperta. Si nota un transitorio di attacco in cui il moto libero dell'ancia è ancora presente: un modello quasi statico come quello

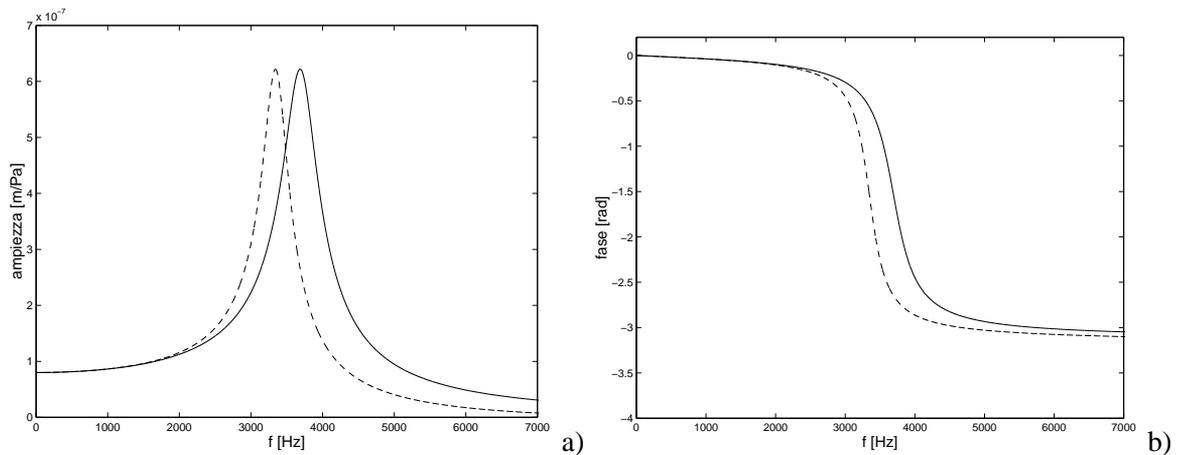


Figura 7.15: Risposte in frequenza a tempo continuo e discreto, $F_s = 20$ kHz. ($H_c(j\omega)$ linea continua, $H_d(e^{j\omega})$ tratteggiata); a) ampiezza, e b) fase.

descritto nella sezione 7.5.2 non è in grado di rioridurre un simile transitorio. Al termine della fase di attacco (della durata di circa 0.08 s) il moto si stabilizza sulla forma d'onda quadra, caratteristica del clarinetto, e la posizione x_r è in fase con la differenza di pressione Δp . È questa la fase del moto in cui l'approssimazione quasi statica può essere lecita. Tuttavia, uno studio dell'andamento di Δp e u_f mostra una situazione lievemente diversa, evidenziata dalla figura 7.18. Sono stati prelevati i segnali relativi a flusso e differenza di pressione al bocchino (u_f e Δp), avendo applicato in ingresso un gradino di pressione $P_0 = 2265$ Pa (valore oltre il quale l'ancia comincia a battere). La figura 7.18 mostra che la relazione tra le due grandezze si discosta dalle previsioni teoriche della approssimazione quasi statica; in particolare si evidenzia un comportamento *isteretico*, indotto dalla dinamica dell'ancia.

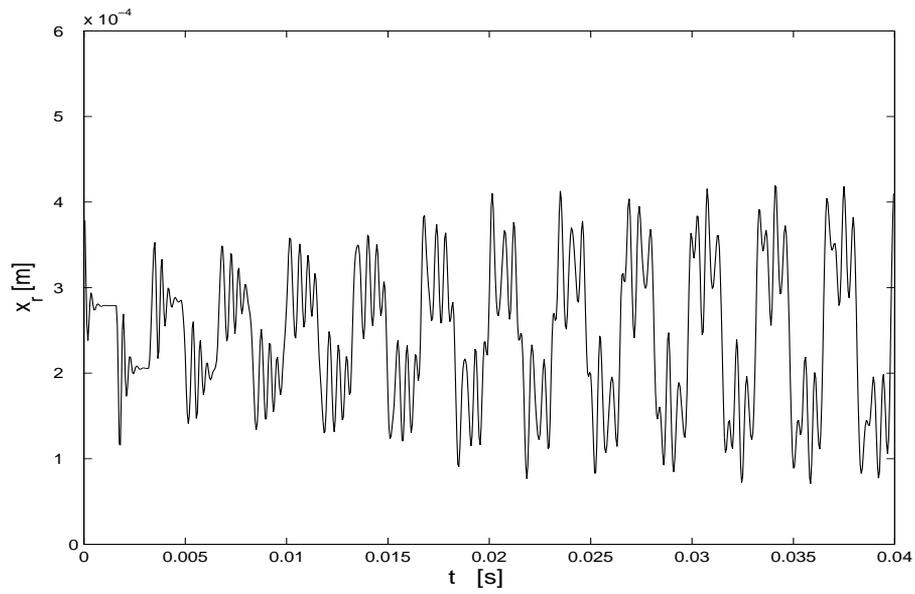


Figura 7.16: Transitorio di attacco per la variabile $x_r(t)$, $P_0 = 1900$ Pa e $F_s = 20$ kHz.

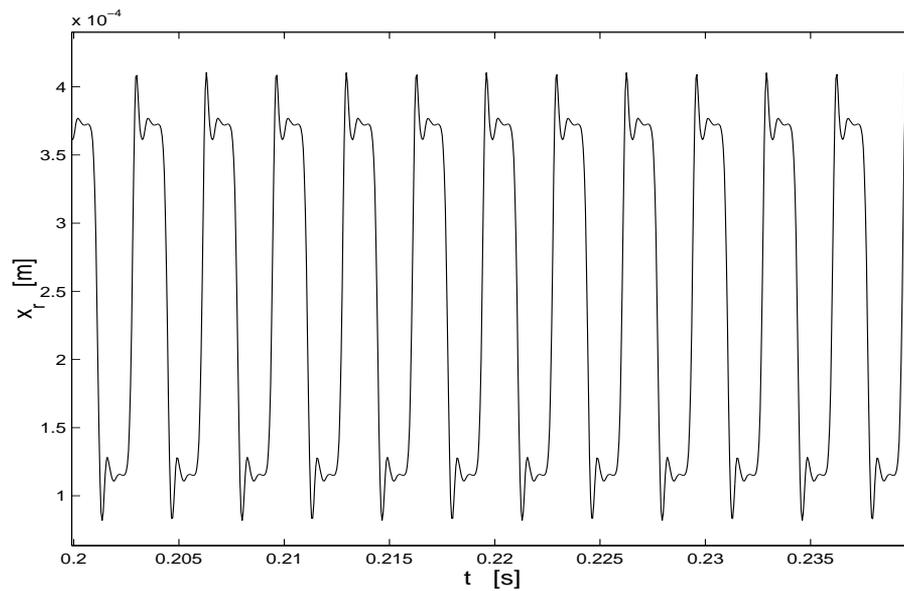


Figura 7.17: Comportamento a regime per la variabile $x_r(t)$, $P_0 = 1900$ Pa e $F_s = 20$ kHz.

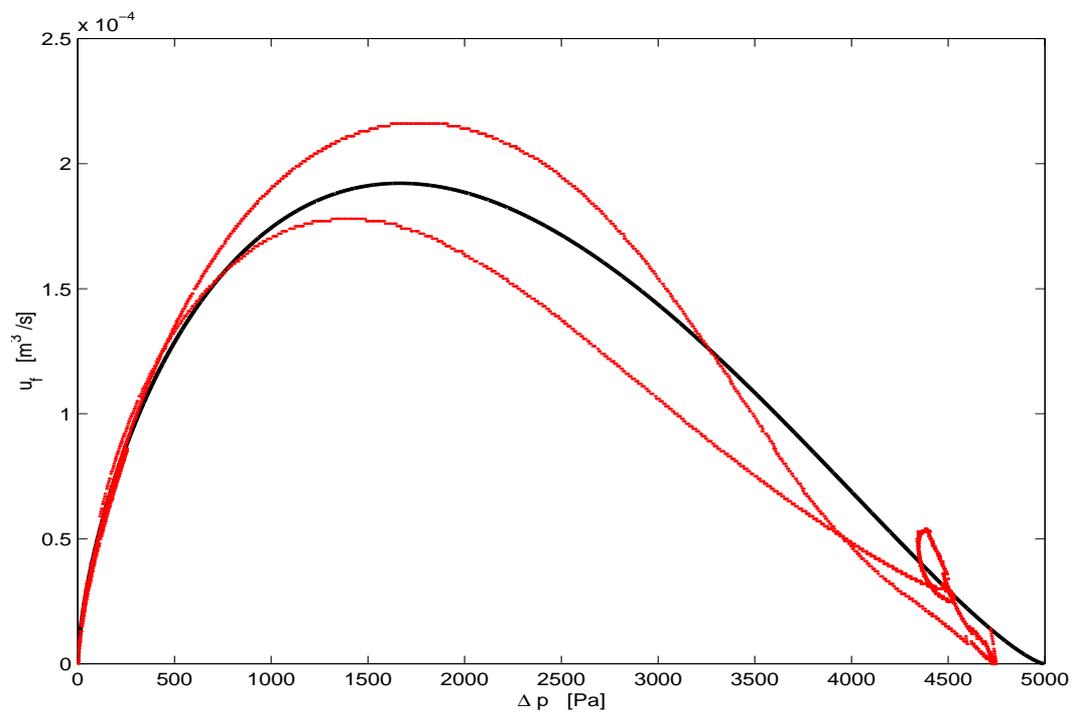


Figura 7.18: Curva quasi statica (linea pesante) e comportamento della simulazione, $P_0 = 2265 \text{ Pa}$ e $F_s = 20 \text{ kHz}$.

Indice

7	Sintesi per modelli fisici	7.1
7.1	Introduzione	7.1
7.2	Elementi concentrati: modelli a tempo continuo	7.2
7.2.1	Analogie	7.2
7.2.2	Giunzioni	7.4
7.2.3	Elementi non lineari	7.6
7.3	Elementi concentrati: metodi numerici	7.8
7.3.1	Campionamento e aliasing	7.8
7.3.2	Mappe lineari	7.9
7.3.3	Integrazione numerica di ODE	7.11
7.4	Elementi distribuiti: l'approccio waveguide	7.12
7.4.1	Variabili d'onda e impedenza d'onda	7.13
7.4.2	Scattering	7.15
7.4.3	Dispersione e dissipazione	7.17
7.4.4	Tubi conici	7.19
7.5	Un esempio completo: il clarinetto	7.21
7.5.1	Risonatore ed eccitatore	7.21
7.5.2	Attacchi e comportamento a regime	7.25
7.5.3	Equazioni a tempo discreto	7.26
7.5.4	Risultati	7.28